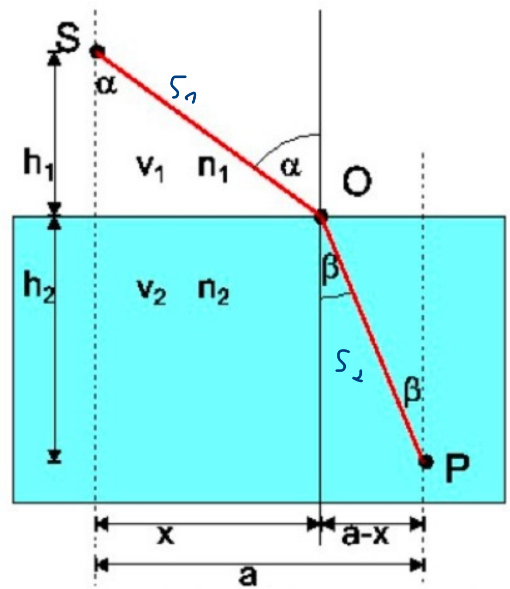
Beachte folgendes:

- $t_{SP} = t_{SO} + t_{OP}$
- Zeit = Strecke durch Geschwindigkeit
- $v_i = Lichtgeschwindigkeit \text{ im } Medium\, i$
- $n_i := \frac{c}{v_i} = Brechungsindex\, des\, Mediums\, i$

  $mit\; c = Vakuumlichtgeschwindigkeit$
- Die Summanden in $\frac{\partial t_{SP}}{\partial x}$ lassen sich durch trigonometrische Funktionen der Winkel ersetzen.

$v_i = \frac{c}{n_i} \Leftrightarrow$



Zeit für s_{sp}:

$$t_{sp} = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} = \frac{x}{\sin\alpha \cdot v_1} + \frac{a-x}{v_2 \cdot \sin\beta}$$

$$\sin\alpha = \frac{x}{s_1} \Leftrightarrow s_1 = \frac{x}{\sin\alpha}$$

$$\sin\beta = \frac{a-x}{s_2} \Leftrightarrow s_2 = \frac{a-x}{\sin\beta}$$

$$\frac{dt_{sp}}{dx} = \frac{1}{v_1 \cdot \sin\alpha} - \frac{1}{v_2 \sin\beta} \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_1 \sin\alpha} = \frac{1}{v_2 \sin\beta} \Leftrightarrow \boxed{\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \Leftrightarrow \frac{\frac{c}{n_2}}{\frac{c}{n_1}} = \frac{c \cdot n_1}{n_2 \cdot c} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}$$

Snelliussches Brechungsgesetz

Lichtgeschw. in einem Medium: $v = \frac{c}{n}$

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s

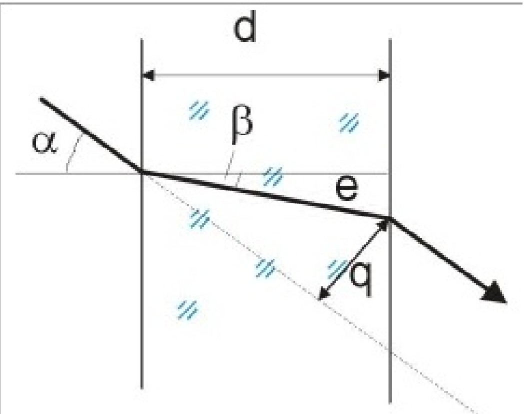
Brechzahlen gegenüber Vakuum für verschiedene Stoffe

Stoff	Brechzahl n_0	Lichtgeschw. in 10^8 m/s
Eis	$1,31$	2,29
Wasser	$1,33$	2,26
Quarzglas	$1,46$	2,05
Plexiglas	$1,49$	2,01
Flintglas	$1,70$	1,76
Diamant	$2,40$	1,25

Wie groß ist die Querverschiebung q eines schräg durch eine Parallelplatte von der Dicke d laufenden Lichtstrahls?

a) Geben Sie eine allgemeine Formel an.
(q = f(d, Alpha, β))

b) Berechnen Sie q für d = 6mm, Alpha = 40° und n = 1,5.



a) $$\left.\begin{aligned} q &= e \cdot \sin(\alpha - \beta) \\ e &= \frac{d}{\cos\beta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow q = \frac{d \cdot \sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = f(d, \alpha, \beta)$$

b) geg.: $\alpha = 40°$, $d = 6\,mm$, $n = \frac{n_G}{n_L} = 1{,}5$, $\beta = ?$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n \Rightarrow \beta = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right) = 25{,}4°$$

$$\Rightarrow q = \frac{6\,mm \cdot \sin(40° - 25{,}4°)}{\cos(25{,}4°)} = 1{,}68\,mm$$

Zyklotron

Aufgaben

1. Ein α-Teilchen besitzt eine Masse von $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg. Berechnen Sie den Radius der Kreisbahn, die ein α-Teilchen beschreibt, wenn es von der Spannung $U = 200$ V beschleunigt in einem Magnetfeld der Stärke $B = 120$ mT senkrecht zu den Feldlinien fliegt.

m Kreisbahn

U

B

$q = 2 \cdot e = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$

ges.: r

$$m\frac{v^2}{r} = q \cdot v \cdot B \iff r = \frac{m \cdot v}{q\,B}$$

v ???

Energiesatz: $\frac{1}{2} m v^2 = qU \Rightarrow v = \sqrt{2\,q/m\,U} = 1{,}39 \cdot 10^5\,m/s$

$$\Rightarrow r = \frac{m}{q\,B}\sqrt{2\,q/m\,U} = \frac{1}{B}\sqrt{2\frac{m}{q}U} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{m}{e}U}$$

2e

$$\underline{\underline{= 2{,}4\,cm}}$$

2. In einem Zyklotron ist der maximale Krümmungsradius der Bahnkurve von geladenen Teilchen $R = 0{,}8$ m. Die magnetische Feldstärke beträgt $B = 1{,}5$ T. Ermitteln Sie die Potentialdifferenz, die Protonen in einem elektrischen Feld durchlaufen müssten, um dieselbe Endgeschwindigkeit wie in dem Zyklotron zu erhalten.

3. Ein Zyklotron gibt α-Teilchen ($m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg) mit einer Energie von $2{,}5 \cdot 10^{-12}$ J ab. Die magnetische Feldstärke beträgt 2 T. Berechnen Sie den größten Krümmungsradius der Bahnkurven dieser α-Teilchen.

2) v: $F_z = F_L \iff \frac{mv^2}{R} = q \cdot v \cdot B$ (*)

$$\iff v = \frac{qBR}{m} = 0{,}38\,c = 1{,}16 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Eigtl. relativistisch! Trotzdem:

$$v = \sqrt{2\frac{q}{m}U} \Rightarrow U = \frac{1}{2q} m v^2 = 69\,MV$$

($m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ist dyamische Masse)

3) $E = qU = 2{,}5 \cdot 10^{-12}\,J = \frac{1}{2} m v^2$ $\quad (U = 7{,}8 \cdot 10^6\,V)$

$$\Rightarrow v = 2{,}74 \cdot 10^7\,m/s \quad (\approx 0{,}1\,c)$$

(*) $\Rightarrow$ $R = \frac{mv}{qB} = 0{,}28\,m$

11.2.4 Das Bohr'sche Atommodell

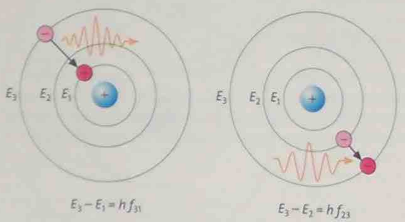
1913 ergänzte Nils BOHR (1885–1962) das Rutherford'sche Atommodell folgerichtig, für die damalige Zeit allerdings revolutionär, durch die Annahme, dass sich Elektronen auf *bestimmten Bahnen strahlungsfrei bewegen.* Diese Annahmen stehen unmittelbar im Widerspruch zur klassischen Physik, nach der *beschleunigte Elektronen Energie an die elektromagnetische Strahlung abgeben* (→ 7.2.4). Die Emission und Absorption nur bestimmter Energiebeträge wird von BOHR auf den Übergang zwischen diesen Bahnen zurückgeführt.
BOHR formulierte seine Annahmen mit dem von PLANCK eingeführten Wirkungsquantum h in den später so bezeichneten **Bohr'schen Postulaten:** $(\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F})$

$F \longleftrightarrow M = r \cdot F$ Drehmoment

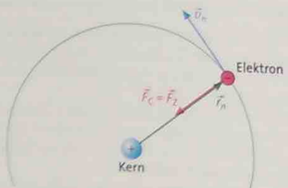
1. Bohr'sches Postulat (Quantenbedingung)
Im Atom bewegen sich Elektronen strahlungsfrei auf stationären Bahnen. Diese Bahnen sind durch den Bahndrehimpuls $L = r m_e v$ (→ 1.4.2) bestimmt, der nur Vielfache von $h/(2\pi)$ annimmt:

$$L_n = n\frac{h}{2\pi} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \hbar := \frac{h}{2\pi}$$

n ist die Quantenzahl, die die Bahn bestimmt.



414.1 Vorstellungen nach dem Bohr'schen Atommodell:
a) Das Elektron emittiert ein Photon.
b) Das Elektron absorbiert ein Photon.



414.2 Das Elektron auf einer strahlungsfreien Bahn entsprechend dem Bohr'schen Atommodell. Es umfliegt den Kern auf einer Kreisbahn, für die das 1. Bohr'sche Postulat gilt. Die Zentripetalkraft F_Z für die Kreisbahn liefert die Coulomb-Kraft F_C.

2. Bohr'sches Postulat (Frequenzbedingung)
Beim Übergang des Elektrons von einer stationären Bahn zu einer anderen wird Energie abgegeben (Emission) oder aufgenommen (Absorption). Die Energieabgabe ΔE des Atoms an ein Photon beträgt beim Übergang des Elektrons von einer Bahn hoher Energie E_m zu einer Bahn geringer Energie E_n (Emission)

$$\Delta E = E_m - E_n = hf. \qquad (= E_{Ph} = \text{Energie des beteiligten Photons})$$

Beim umgekehrten Vorgang wird ein Photon der Energie hf aufgenommen (Absorption), siehe **Abb. 414.1.**

analog: $p \longleftrightarrow L = r \cdot p$ Drehimpuls

Berechnung der diskreten Energiezustände des Wasserstoffatoms

Mit den Bohr'schen Postulaten gelingt es, die gemessenen diskreten Linien im Spektrum des Wasserstoffs zu berechnen. Da sich die Energie der Photonen dieser Linien nach dem 2. Bohr'schen Postulat aus der Energiedifferenz des Atoms mit Elektronen auf unterschiedlichen Bahnen ergibt, geht es zunächst um die Berechnung der Energie auf einer Bahn.

Die Energie E_n des Atoms mit einem Elektron auf einer Bahn n ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie $E_n = E_{\text{kin},n} + E_{\text{pot},n}$.

Die kinetische Energie $E_{\text{kin},n} = \frac{1}{2} m_e v_n^2$ hängt von der noch unbekannten Geschwindigkeit v_n des Elektrons auf der n-ten Bahn ab.

Die potentielle Energie $E_{\text{pot},n}$ des Atoms mit dem Elektron im Abstand r_n vom Kern (→ 5.2.2) ist

$$E_{\text{pot},n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r_n} \quad \text{oder mit} \quad Q_1 = -Q_2 = -e$$

$$E_{\text{pot},n} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}. \qquad F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Der Radius r_n der Bahn n ist noch unbekannt. Zur Berechnung der Energie E_n mit dem Elektron auf einer Bahn n müssen also der Radius r_n der Bahn und seine Geschwindigkeit v_n auf der Bahn bestimmt werden.

Radius und Geschwindigkeit

Für eine Kreisbahn des Elektrons mit dem Radius r und der Geschwindigkeit v ist eine Zentripetalkraft $F_Z = m_e v^2/r$ erforderlich. Diese Kraft liefert die Coulomb-Kraft $F_C = e^2/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$, **Abb. 414.2.** Es gilt also

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

oder umgeformt

$$r m_e v^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}. \qquad (1)$$

Nach dem Bohr'schen Atommodell umkreist das Elektron den Kern auf bestimmten Bahnen strahlungsfrei. Für die Bahn n gilt das 1. Bohr'sche Postulat $r_n m_e v_n = L = n h/2\pi$. Durch Multiplikation mit v_n ergibt sich links die linke Seite von (1), also gilt

$$L v_n = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \quad \text{und damit für die Bahngeschwindigkeit}$$

$$v_n = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h n}. \qquad (2)$$

Dies in (1) eingesetzt liefert **die Bahnradien**

$$r_n = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e e^2} n^2. \qquad (3)$$

Aufgrund der Quantenbedingung (1. Bohr'sches Postulat) ergeben sich für das Elektron nur ganz bestimmte feste Bahnen, deren Radien r_n und Geschwindigkeiten v_n sich allein aus Naturkonstanten berechnen lassen. Der Radius der innersten Bahn mit $n = 1$ ist $r_1 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}$ m. Dieser Radius heißt **Bohr'scher Radius.**

$$E_n = E_{rot,n} + E_{kin,n} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} + \frac{1}{2} m v_n^2$$

Damit liegt nach dieser Vorstellung der Atomdurchmesser bei etwa 10^{-10} m. Dieser Wert stimmt mit den auf anderen Wegen gefundenen Werten gut überein.

Diskrete Energiewerte

Die kinetische Energie E_{kin} auf der n-ten Bahn ist mit Gleichung (2)

$$E_{\text{kin},n} = \frac{1}{2} m_e \frac{e^4}{4\varepsilon_0^2 h^2 n^2} = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

In die Formel für die potentielle Energie $E_{\text{pot},n}$ wird r_n aus Gleichung (3) eingesetzt:

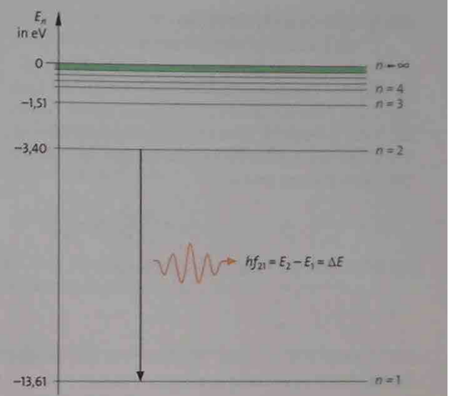
$$E_{\text{pot},n} = -\frac{m_e e^4}{4\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

Die Gesamtenergie E_n des Atoms mit dem Elektron auf der n-ten Bahn ist dann:

$$\begin{aligned} E_n &= E_{\text{kin},n} + E_{\text{pot},n} \\ &= \frac{1}{8}\frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2 n^2} - \frac{1}{4}\frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2 n^2} \\ &= -\frac{1}{8}\frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{1}{8}\frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Die Energie E_n ist negativ, weil der Betrag der kinetischen Energie $E_{\text{kin},n}$ halb so groß ist wie der der potentiellen Energie $E_{\text{pot},n}$. Die negative potentielle Energie überwiegt in der Summe der Energieterme.

Die Werte der Gesamtenergie E_n des Atoms werden für $n = 1, 2, 3 \ldots$ entlang der Energieachse aufgetragen und führen zum **Energieniveauschema** des Wasserstoffatoms in **Abb. 415.1.**



415.1 Das Energieniveauschema des Wasserstoffatoms. Beim Übergang des Elektrons von der Bahn mit $n = 2$ auf die innere Bahn mit $n = 1$ wird die Energie $E_2 - E_1 = hf_{21}$ abgegeben.

Nach dem 2. Bohr'schen Postulat besitzt das Wasserstoffatom diskrete Energiezustände E_n, die sich aus den unterschiedlichen Bahnen des Elektrons ergeben:

$$E_n = -\frac{1}{8}\frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$$

Für $n = 1$, den Grundzustand, beträgt die Energie $E_1 = -2{,}18 \cdot 10^{-18}$ J $= -13{,}6$ eV.
Befindet sich das Elektron auf der n-ten Bahn, so lässt sich die Energie E_n des Atoms aus der im Grundzustand berechnen:

$$E_n = E_1 \frac{1}{n^2} \quad \text{oder} \quad E_n = -13{,}6\ \text{eV} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Bahnradius r_n und Energie E_n hängen also nur von n und von Naturkonstanten ab. Die Quantenzahl n bestimmt den Energiezustand des Atoms.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Radien der ersten drei Bohr'schen Bahnen im Wasserstoffatom.
2. Berechnen Sie die potentielle und die kinetische Energie eines Elektrons auf der ersten und der zweiten Bahn des Wasserstoffatoms.
3. Berechnen Sie das Verhältnis von Coulomb-Kraft und Gravitationskraft zwischen Elektron auf der ersten Bahn und Kern in einem Wasserstoffatom.
*4. Bestimmen Sie die Umlauffrequenz des Elektrons auf der ersten Bahn im Wasserstoffatom. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Frequenz des Photons, das für die Ionisierung eines Wasserstoffatoms im Grundzustand benötigt wird.