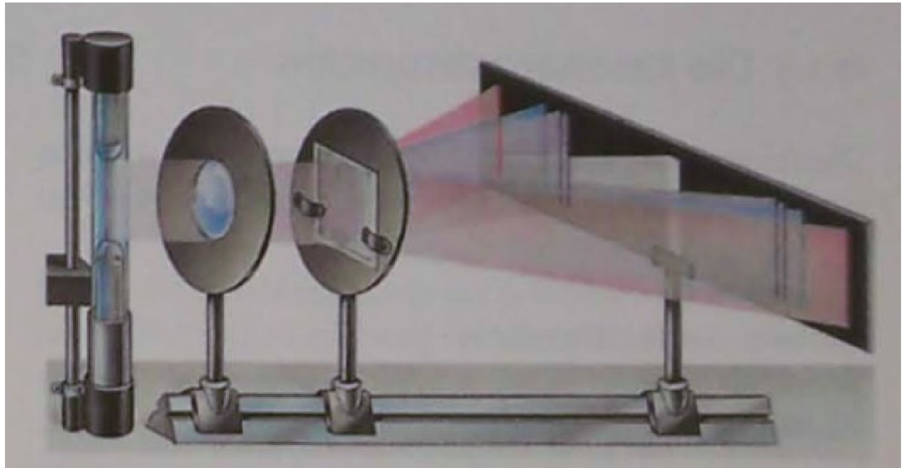
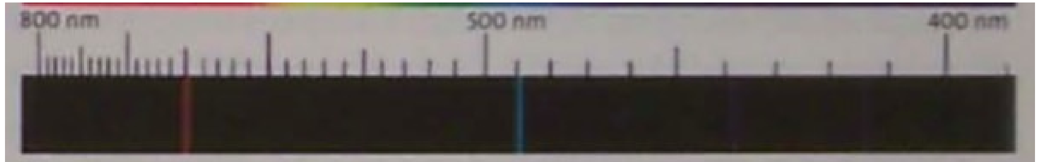
Balmer-Formel und Bohrsches Atommodell



409.1 Einfacher Versuchsaufbau zur Demonstration des Wasserstoffspektrums. Auf dem Schirm erscheint das Hauptmaximum in der Mitte und links und rechts davon die vier Linien im Spektrum erster Ordnung.



Linie	Wellenlänge λ in nm	Frequenz f in Hz	Energie $E = hf$
H_α	656	$4{,}57 \cdot 10^{14}$	$3{,}03 \cdot 10^{-19}$ J = 1,89 eV
H_β	486	$6{,}17 \cdot 10^{14}$	$4{,}09 \cdot 10^{-19}$ J = 2,55 eV
H_γ	434	$6{,}91 \cdot 10^{14}$	$4{,}58 \cdot 10^{-19}$ J = 2,86 eV
H_δ	410	$7{,}31 \cdot 10^{14}$	$4{,}84 \cdot 10^{-19}$ J = 3,02 eV

409.2 Linien des Wasserstoffspektrums im sichtbaren Bereich im Vergleich zu dem kontinuierlichen Spektrum einer Glühlampe

Balmer: $f = 3{,}288 \cdot 10^{15}\,\text{Hz}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \ldots\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right)$

$= 4{,}57 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} \mathrel{\hat{=}} H_\alpha$

A1) a) $m = 7$: $f_7 = 7{,}55\ 10^{14}\,\text{Hz}$, $\lambda_7 = 390\,\text{nm}$

$m = 8$: $f_8 = 7{,}71 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$, $\lambda_8 = 380\,\text{nm}$

b) $m \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{m} \to 0$: $f_\infty = C/4 = 8{,}22\ 10^{14}\,\text{Hz}$, $\lambda_\infty = 365\,\text{nm}$

Berechnung der diskreten Energiezustände des H-Atoms:

$$E_n = E_{pot,n} + E_{kin,n} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} + \frac{1}{2} m_e v_n^2$$

1. Bohrsches P:

$L = n\frac{h}{2\pi}$, $n = 1, 2, \ldots$

$= r_n \cdot m v_n$

$\hbar = \frac{h}{2\pi}$

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}$$

$$\Leftrightarrow r_n m_e v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \qquad (*)$$

$$= L \cdot v_n = n\frac{h}{2\pi} v_n \Rightarrow v_n = \frac{e^2 \cdot 2\pi}{4\pi\varepsilon_0 h n} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h n}$$

in (*) eingesetzt: $r_n = \frac{e^2 \, 4\varepsilon_0^2 h^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e e^4} n^2 = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} n^2$

$$\Rightarrow E_n = -\frac{e^2 \cancel{\pi} m_e e^2}{4\cancel{\pi}\varepsilon_0 \varepsilon_0 h^2 n^2} + \frac{1}{2} m_e \frac{e^4}{4\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

$$= -\frac{m_e e^4}{4\varepsilon_0^2 h^2 n^2} + \frac{m_e e^4}{2 \cdot 4\varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

$$= -\frac{1}{8}\frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -2{,}18\ 10^{-18}\,J\,\frac{1}{n^2} = -13{,}6\,eV \cdot \frac{1}{n^2}$$

n	E_n	$\Delta E/eV$	$\Delta E/J$	f/Hz
1	13,6			
2	3,4	1,89	$3{,}02 \cdot 10^{-19}$	$4{,}56 \cdot 10^{14} \mathrel{\hat=} H_\alpha$
3	1,51	2,55	$4{,}08 \cdot 10^{-19}$	$6{,}16\ 10^{14} \mathrel{\hat=} H_\beta$
4	0,85			

Bezeichnung	**Wellenlänge in nm**	f/Hz	$\Delta E/J$	$\Delta E/eV$
Lyman-α-Linie (Ly-α)	121,5	$2{,}469 \cdot 10^{15}$	$1{,}636 \cdot 10^{-18}$	10,23
Lyman-β-Linie	102,5	$2{,}927 \cdot 10^{15}$	$1{,}939 \cdot 10^{-18}$	12,12

$$\Delta E = \left(-13{,}6\,eV \frac{1}{n_1^2}\right) - \left(-13{,}6\,eV \cdot \frac{1}{n_2^2}\right) = 13{,}6\,eV\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right)$$

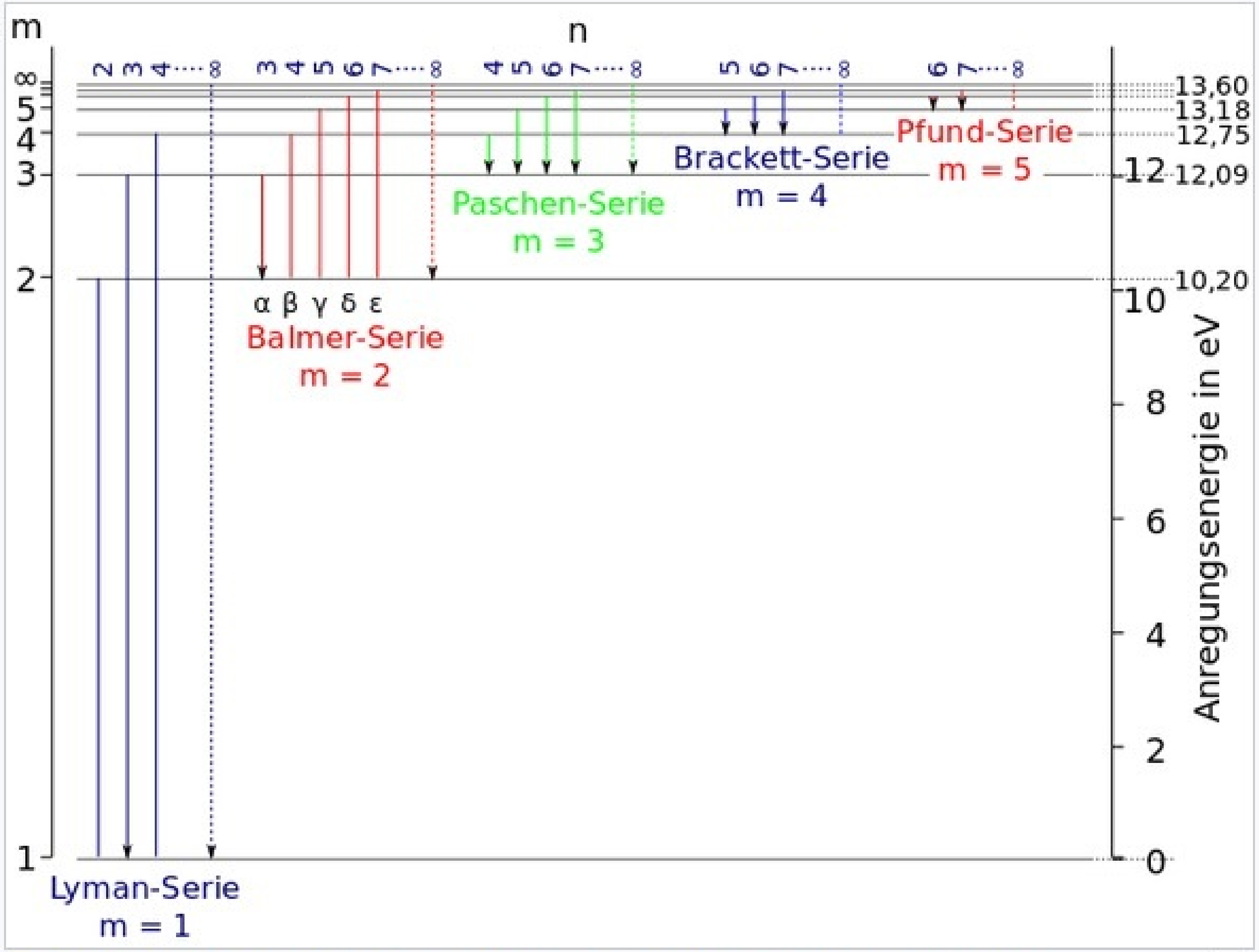
$$= 10{,}23\,eV$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right) = 0{,}75$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} = 0{,}75$$

Ly-β: von 3 auf 1

$$\max \Delta E = 13{,}6\,eV \Rightarrow \min \lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E} = 90\,nm$$



Energieniveaus des Wasserstoffatoms mit nach Serien geordneten Übergängen

Wasserstoffähnliche "Atome"

H : $E_n = -\frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -13{,}6\,eV \cdot \frac{1}{n^2}$

He^+ :

Li^{2+} usw : $E_n = -Z^2 \cdot C \cdot \frac{1}{n^2}$

*3. Im Spektrum des einfach ionisierten Heliums He^+ findet man Linien mit $\lambda_1 = 656$ nm, $\lambda_2 = 541$ nm, $\lambda_3 = 486$ nm, $\lambda_4 = 454$ nm und $\lambda_5 = 434$ nm. Ermitteln Sie einen mathematischen Zusammenhang ähnlich der Balmer-Formel, der die Folge der zugehörigen Frequenzen beschreibt.

Lösung:

Durch systematisches Probieren erhält man mit der Formel

$$f = 4\,C\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{m^2}\right)$$

für $m = 6, 7, 8, 9, 10$ die genannten Frequenzen bzw. Wellenlängen.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Radien der ersten drei Bohr'schen Bahnen im Wasserstoffatom.
3. Berechnen Sie das Verhältnis von Coulomb-Kraft und Gravitationskraft zwischen Elektron auf der ersten Bahn und Kern in einem Wasserstoffatom.
*4. Bestimmen Sie die Umlauffrequenz des Elektrons auf der ersten Bahn im Wasserstoffatom. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der Frequenz des Photons, das für die Ionisierung eines Wasserstoffatoms im Grundzustand benötigt wird.

$$F_G = \gamma \cdot \frac{m_1 \, m_2}{r^2}$$

$$\left(\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \right)$$

1.) $r_1 = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\,m$, $r_2 = 2{,}117 \cdot 10^{-10}\,m$, $r_3 = 4{,}76 \cdot 10^{-10}\,m$

2.) $$\frac{F_C}{F_G} = \frac{e^2 \, \cancel{r^2}}{4\pi\varepsilon_0 \, \cancel{r^2} \, \gamma \cdot m_e \cdot m_p} = 2 \cdot 10^{39}$$

4) $F_C = F_Z \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$, $\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^3}} \Rightarrow \underline{\underline{f = 6{,}58 \cdot 10^{15}\,Hz}}$

oder: $v_1 = 2\pi r_1 f$, v_1 u. r_1 aus Bohr-Herl.

$E = h \cdot f = 13{,}6\,eV \Rightarrow \underline{f = 3{,}29 \cdot 10^{15}\,Hz}$