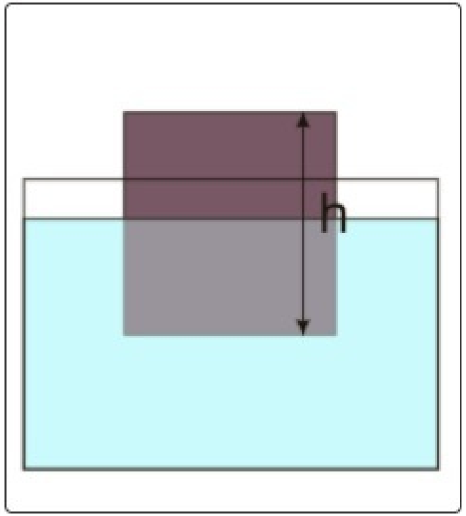
EF Ph G1 2016/17

Ein im Wasser schwimmender Holzquader von der Höhe h und der Dichte ρ_K wird bis zur Oberkante ins Wasser gedrückt und losgelassen. Er führt nun eine auf- und niederschwingende Bewegung aus. Welcher Ausdruck ergibt sich für die Periodendauer?



Tipp:
Rücktreibende Kraft ist die Auftriebskraft (s. Archimedisches Prinzip)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \iff T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g} \iff \frac{T^2 g}{4\pi^2} = l$$

geg.: T, g / ges.: l

0. Zum Aufwärmen

a) Das Pendel einer Wanduhr macht in 2 min 150 Schwingungen. Berechnen Sie die Periodendauer und Frequenz des Pendels. Wieviele Schwingungen macht das Pendel in einem Tag, in einem Jahr?
b) Zwei Pendel mit den Schwingungsdauern T_1 = 1,5 s und T_2 = 1,6 s starten gleichzeitig aus der Ruhelage. Nach welcher Zeit gehen beide wieder genau gleichzeitig durch die Ruhelage? Wieviele Schwingungen hat jedes Pendel in dieser Zeit gemacht?
c) Zu welchen Zeiten nach dem Nulldurchgang (= Durchgang durch die Ruhelage) erreicht die Auslenkung eines Federpendels mit y_{max} = 5 cm und f = 0,4 Hz die Werte 8 mm, 2 cm und 4 cm?
d) Eine Schaukel, die aus einem an zwei dünnen Seilen aufgehängten dicken Brett besteht, hat eine bestimmte Schwingungsdauer T. Wie ändert sich diese Schwingungsdauer, wenn ein Mensch auf der Schaukel sitzt und schaukelt?

a) $T = \frac{120\,s}{150} = 0{,}8\,s \Rightarrow f = \frac{1}{T} = 1{,}25\,Hz$

$n_d = \frac{86400\,s}{0{,}8\,s} = 108000$, $n_a = 3{,}94 \cdot 10^7$

b) nach $T/2$ Nulldurchgang , $n_1 \cdot 0{,}75\,s = n_2 \cdot 0{,}8\,s$ $\quad n_{1,2} \in \mathbb{N}$

Test: $16 \cdot 0{,}75\,s = 12\,s = 15 \cdot 0{,}8\,s$

Exkurs: $y(t) = y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$

$y_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5\,s} \cdot t\right) \wedge y_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}6\,s} \cdot t\right)$

Wo ist $y_1 = 0 = y_2$

c) $y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega t)$, gesucht: t - Werte

$\Rightarrow \frac{y}{y_0} = \sin(2\pi f t) \quad | \sin^{-1}$

arcsin = $\sin^{-1}$

$$\Rightarrow \frac{\sin^{-1}\left(\frac{y}{y_0}\right)}{2\pi f} = t = \begin{cases} 0{,}06\,s & \text{bei } y = 8\,mm \\ 0{,}16\,s & \text{"} \quad 2\,cm \\ 0{,}37\,s & \text{"} \quad 4\,cm \end{cases}$$

d) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ ist massenunabh.

1. Nach ihrer Fertigstellung unterzogen die Bauingenieure die neue Brücke über die Norder-Elbe einem Großversuch. Unter der Last eines in der Mitte der Brücke zu diesem Zweck angehängten Gewichts von 100 t Masse bog sich die Brücke den Messungen zufolge um 5 cm durch. Als schließlich die Verbindung der Brücke mit dem Gewicht schlagartig gelöst wurde, geriet die Brücke wie erwartet in Schwingungen, die viele Sekunden andauerten. Die Frequenz der Schwingung betrug 0,62 Hz. Ein Beobachter, der sich mitten auf der Brücke befand, berichtete, er habe das Gefühl gehabt, die Brücke habe sich um ca. einen Meter gehoben und gesenkt.

   a) Wie groß muss die Amplitude wirklich gewesen sein, mit der sich der Augenzeuge bewegt hat?

   b) Wie groß war seine maximale Geschwindigkeit? *(Tipp: $v = \frac{ds}{dt}$; Ableitung von $\cos(\omega t) = -\omega \cdot \sin(\omega t)$; Sinus- und Kosinuswerte sind „begrenzt")*

   c) Bei welcher Elongation (Phase) erfuhr obiger Beobachter die maximale Beschleunigung, und wie groß war diese? *(Tipp: $a = \frac{dv}{dt}$)*

   d) Wie groß ist die Energie, die mit der beschriebenen Schwingbewegung der Brücke verbunden ist?

a) $y_{max} = 5\,cm$

b) $y(t) = -0{,}05\,m \cdot \cos(2\pi \cdot 0{,}62\,Hz \cdot t)$

$\Rightarrow v = \frac{dy}{dt} = 0{,}05\,m \cdot 2\pi \cdot 0{,}62\,Hz \cdot \underbrace{\sin(\dots)}_{\leq 1}$

$\Rightarrow$ v ist maximal $0{,}05 \cdot 2\pi \cdot 0{,}62\,m/s$

$= 0{,}195\,m/s$

c) $a = \frac{dv}{dt} = 0{,}05\,m\,\omega^2 \cdot \underbrace{\cos(\dots)}_{\leq 1} \Rightarrow a_{max} = 0{,}05\,m \cdot \omega^2$

$= 0{,}76\,m/s^2$

Im oberen Umkehrpkt: $a_{ges} = (0{,}76 + 9{,}81)\,m/s^2$

d) $E_{Sp} = \frac{1}{2} D\, y_{max}^2$ (Mittelstufe: $\frac{1}{2} D s^2$)

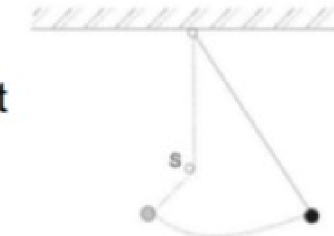
$D = \frac{F}{y_{max}} = \frac{100\,t \cdot g}{0{,}05\,m} = 1{,}962 \cdot 10^7\,\frac{N}{m} \Rightarrow E_{Sp} = 24{,}5\,kJ$

2. Ein Körper der Masse 3 kg hängt an einem 1 m langen Faden.

a) Berechnen Sie die Periodendauer für einen Ort, an dem die Erdbeschleunigung $9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ beträgt.

b) An einem anderen Ort misst man mit demselben Pendel die Schwingungsdauer 2,028 s. Wie groß ist dort die Erdbeschleunigung?

3. 40 cm unter dem Aufhängpunkt eines 60 cm langen Fadenpendels befindet sich ein fester Stift S, an den sich der Faden während des Schwingens vorübergehend anlegt. Berechne die Frequenz der Schwingung!

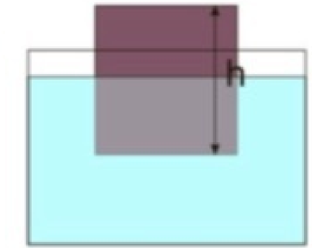


2.a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2{,}006\ s$

b) $g_x = \frac{4\pi^2 l}{T^2} = 9{,}6\ m/s^2$

3. $T_{ges} = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 = 1{,}25 \Rightarrow f = 0{,}81\ Hz$

4. Ein im Wasser schwimmender Holzquader von der Höhe $h=40\,cm$ und der Dichte $\rho_K=\frac{m_K}{V_K}=500\,kg/m^3$ wird bis zur Oberkante ins Wasser gedrückt und losgelassen. Er führt nun eine auf- und niederschwingende Bewegung aus. Die Auftriebskraft ist nach dem Archimedischen Gesetz immer so groß, wie die Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit, also $F_A=\rho_W \cdot V \cdot g$, $\rho_W=\textit{Dichte des Wassers}=1000\,kg/m^3$, $V=\textit{Volumen des Körpers, das sich unter Wasser befindet}$.



s

Begründe, dass es sich hierbei um eine harmonische Schwingung handelt und berechne die Periodendauer.

rücktreibende Kraft $\quad F_A = \rho_W \cdot g \cdot V = \rho_W \cdot g \cdot A \cdot s$, d.h. $\boxed{F \sim s}$

harmonisch

$$D = \frac{F_{A,max}}{h} = \frac{\rho_W \cdot g \cdot V_K}{h} = \frac{\rho_W \cdot g \cdot m_K}{\rho_K \quad h}$$

$$\left(V_K = \frac{m_K}{\rho_K} \right)$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m_K}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_K \cdot h}{\rho_W \cdot g}} = 0{,}9\,s$$