10Ph4_14_15_1252

Zentripetalkraft - Gravitationskraft - Keplersche Gesetze

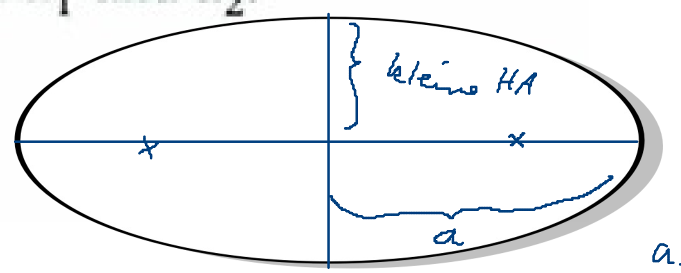
Merksatz

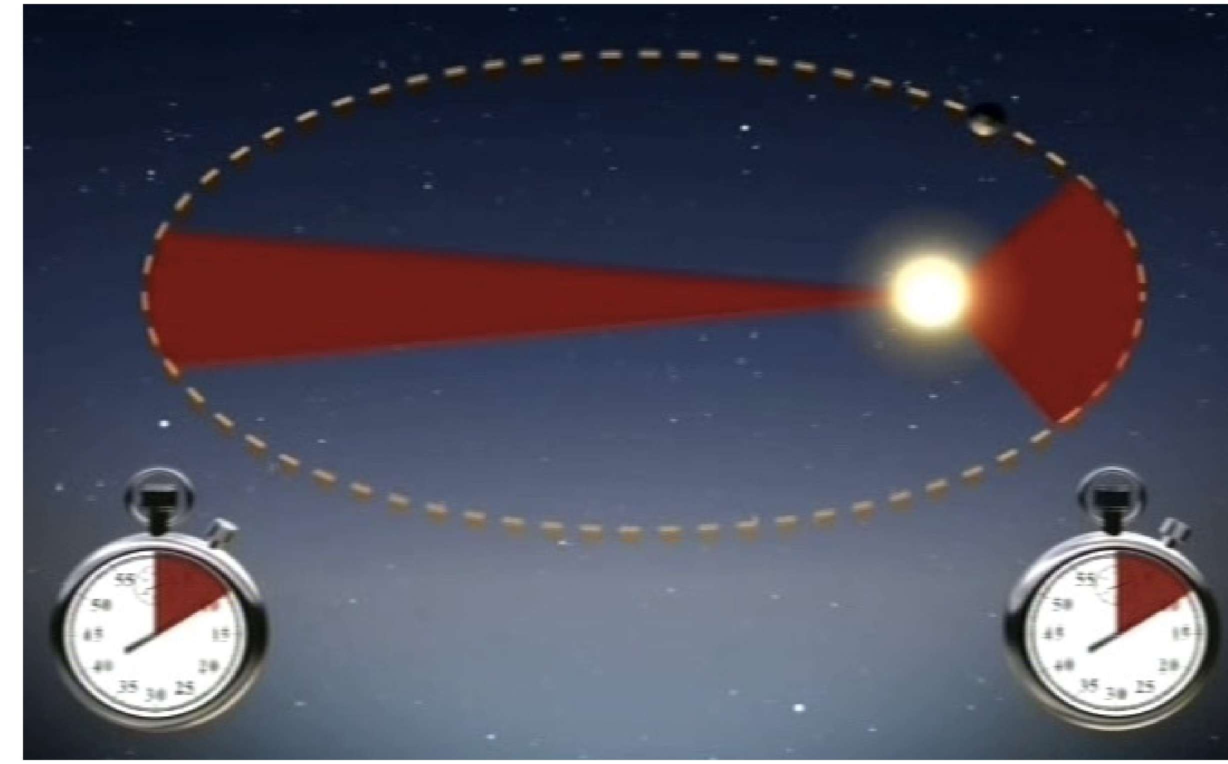
Erstes KEPLER-Gesetz: Trabanten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt der Zentralkörper (z. B. die Sonne) steht.

Zweites KEPLER-Gesetz (Flächensatz): Der Fahrstrahl Zentralkörper–Trabant überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Drittes KEPLER-Gesetz: Die Quadrate der Umlaufdauern T_1 und T_2 zweier Trabanten um den gleichen Zentralkörper verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a_1 und a_2:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{oder} \quad \frac{a^3}{T^2} \text{ ist konstant.}$$





a = große Halbachse

Berechnen Sie Umlaufdauer T und Geschwindigkeitsbetrag v eines Satelliten, der die Erde auf einer elliptischen Bahn mit der großen Halbachse a = 6700 km umläuft. Benutzen Sie die Tatsache, dass der Mond (r_M = 384 000 km) die Erde in 27,3 Tagen (T_M) umläuft.

$$\frac{T_M^2}{T_S^2} = \frac{a_M^3}{a_S^3} \quad | \text{kW}$$

ges.: T_S

$$\Leftrightarrow \frac{T_S^2}{T_M^2} = \frac{a_S^3}{a_M^3} \quad | \cdot T_M^2$$

$$\Leftrightarrow T_S = \sqrt{\frac{a_S^3}{a_M^3} \cdot T_M^2} = 95 \text{ min}$$

Klausurrelevante Inhalte

- $F_Z = m\frac{v^2}{r} = m\frac{(2\pi r)^2}{T^2 r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}$

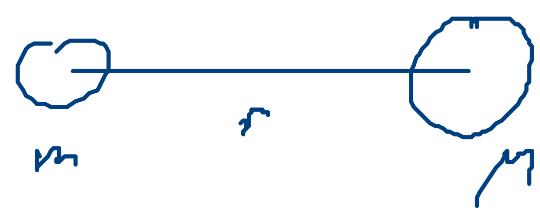
$v = \frac{2\pi r}{T}$

T = Umlaufdauer

$f = \frac{1}{T}$, $[f] = 1\,Hz$ (Hertz)

bei Planeten wirkt die Grav.-Kr. als Zentr.-K:

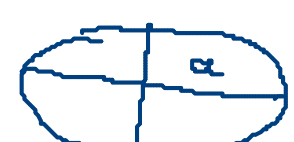
- $F_G = \gamma \cdot \frac{mM}{r^2}$



[$\Rightarrow$ z.B. $m\frac{v^2}{r} = \gamma\frac{mM}{r^2} \Rightarrow M = \frac{v^2 r}{\gamma}$]

- Keplersche Gesetze

$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$ oder: für alle Trabanten gilt $\frac{T^2}{a^3} = konst.$



- Energie, Fluchtgeschw.: nur am Rande

Energie im Gravitationsfeld

Die zugeführte Energie und damit die Zunahme der Höhenenergie (auch Lageenergie oder potentielle Energie genannt) ist also

$$\Delta W_{pot} = \gamma \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_z}\right).$$

Merksatz

Das Nullniveau der potentiellen Energie legt man ins Unendliche. Im radialen Schwerefeld eines Körpers der Masse M hat ein anderer Körper mit der Masse m und dem Mittelpunktsabstand r die negative potentielle Energie

$$W_{pot} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r}.$$

A1 **a)** Erläutern Sie, wie man die Gravitationsfeldstärke g am Erdäquator aus dem Gravitationsgesetz berechnen kann.

b) Berechnen Sie, wie groß dort die Zentripetalkraft für einen Körper der Masse 1 kg ist. Wie viel Prozent der Gravitationskraft sind es?

A2 **a)** Bestimmen Sie den Betrag v der Geschwindigkeit und die Bewegungsenergie eines Erdsatelliten (m = 1000 kg), der in 1000 km Höhe eine Kreisbahn beschreibt.

b) Berechnen Sie, welche Energie man braucht, um ihn von der als ruhend gedachten Erdoberfläche in die Umlaufbahn zu bringen.

c) Begründen Sie, weshalb man Satelliten nahe am Äquator und nach Osten abschießt.

HA: S.103/A1,A2
und die drei Aufg.

Fluchtgeschwindigkeit

Welche kinetische Energie muss ein Körper haben, damit er das Gravitationsfeld des Zentralkörpers verlassen kann?
(D.h.: ... "um in das Unendliche zu gelangen")

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = \gamma \cdot m \cdot M/R \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2\gamma \cdot M/R}$$

Aufgabe 1: Wie groß sind die Fluchtgeschwindigkeiten von Erde, Mond und Sonne?

Erde: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6380$ km, $v = 11{,}182$ km/s

Mond: $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, $R = 1740$ km, $v \approx 2{,}38$ km/s

Sonne: $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, $R = 696000$ km

Gravitationskonstante $\cancel{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \mathrm{m^3/(s^2kg)} = \gamma$

Aufgabe 2: Wie klein müsste die Erde sein, damit ihre Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist?

Masse der Erde: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg,

Gravitationskonstante $\cancel{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \mathrm{m^3/(s^2kg)}, = \gamma$

Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}\, \mathrm{m/s}$

Aufgabe 3: Wählen Sie jetzt statt der Erde einen Stern mit der Masse des Schwarzen Lochs im galaktischen Zentrum (4,3 Millionen mal die Masse der Sonne). Wie groß ist jetzt der kritische Radius?

Masse der Sonne: $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg,

Gravitationskonstante $\cancel{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, \mathrm{m^3/(s^2kg)}, = \gamma$

Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}998 \cdot 10^{8}\, \mathrm{m/s}$