10Ph1_14_15_1249

Zentripetalkraft - Gravitationskraft - Keplersche Gesetze

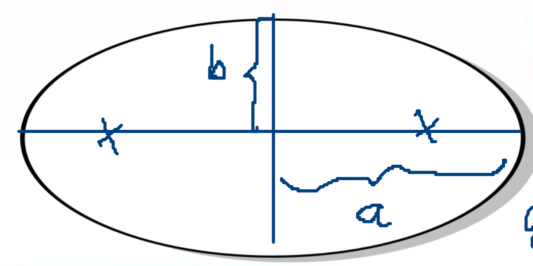
Merksatz

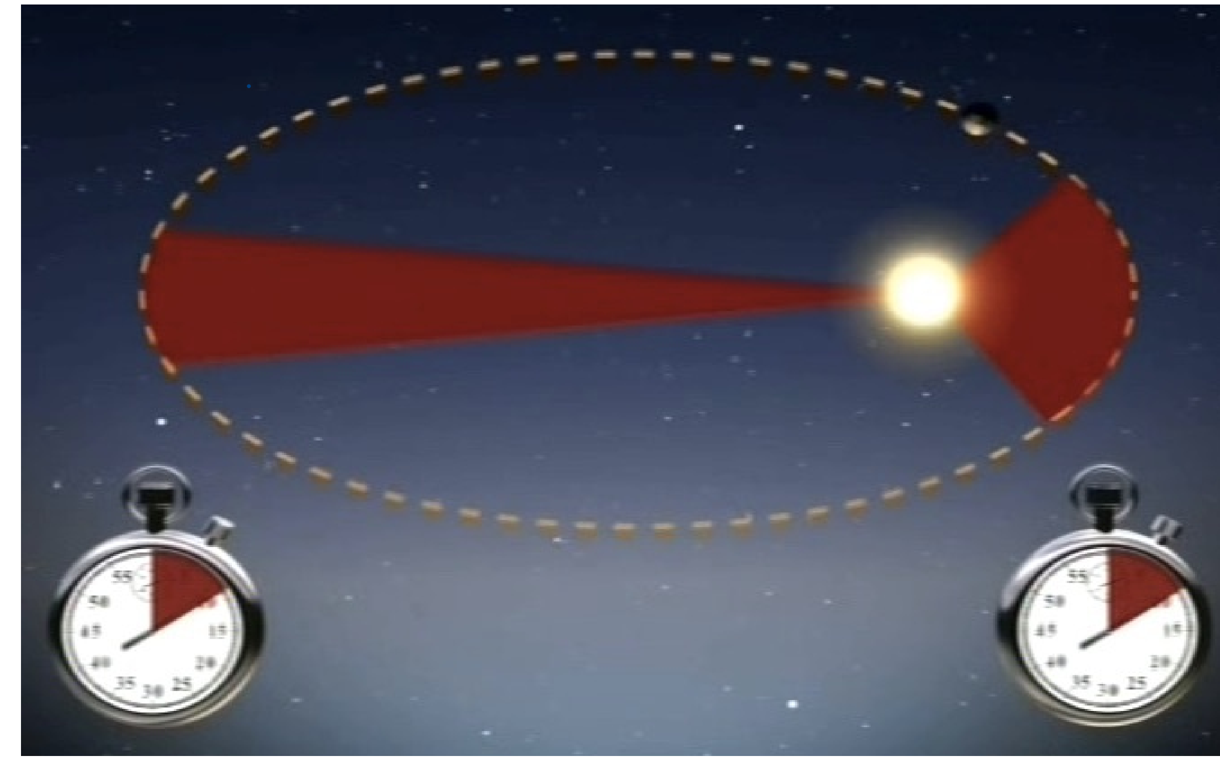
Erstes KEPLER-Gesetz: Trabanten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt der Zentralkörper (z. B. die Sonne) steht.

Zweites KEPLER-Gesetz (Flächensatz): Der Fahrstrahl Zentralkörper–Trabant überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Drittes KEPLER-Gesetz: Die Quadrate der Umlaufdauern T_1 und T_2 zweier Trabanten um den gleichen Zentralkörper verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen a_1 und a_2:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\frac{a^3}{T^2}}_{=:\,C} \text{ ist konstant.}$$





Berechnen Sie Umlaufdauer T und Geschwindigkeitsbetrag v eines Satelliten, der die Erde auf einer elliptischen Bahn mit der großen Halbachse $a = 6700$ km umläuft. Benutzen Sie die Tatsache, dass der Mond ($r_M = 384\,000$ km) die Erde in 27,3 Tagen (T_M) umläuft.

Lsg: entweder mit GTR („Menu" → „EQUA" → „F3")

oder klassisch: $C = \frac{(3{,}84 \cdot 10^6\,\text{m})^3}{(27{,}3 \cdot 86400\,\text{s})^2} = 1 \cdot 10^{13}\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}$

$\Rightarrow C = \frac{(6{,}7 \cdot 10^6\,\text{m})^3}{T_s^2} \Rightarrow T_s = 5440\,\text{s} = 91\,\text{min}$

$v = \frac{2\pi r}{T} \approx \frac{2\pi a}{T} = 7700\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 27700\,\text{km/h}$

Energie im Gravitationsfeld

Die zugeführte Energie und damit die Zunahme der Höhenenergie (auch Lageenergie oder potentielle Energie genannt) ist also

$$\Delta W_{pot} = \gamma \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_z}\right).$$

Merksatz

Das Nullniveau der potentiellen Energie legt man ins Unendliche. Im radialen Schwerefeld eines Körpers der Masse M hat ein anderer Körper mit der Masse m und dem Mittelpunktsabstand r die negative potentielle Energie

$$W_{pot} = -\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r}.$$

A1 **a)** Erläutern Sie, wie man die Gravitationsfeldstärke g am Erdäquator aus dem Gravitationsgesetz berechnen kann.
b) Berechnen Sie, wie groß dort die Zentripetalkraft für einen Körper der Masse 1 kg ist. Wie viel Prozent der Gravitationskraft sind es?

A2 **a)** Bestimmen Sie den Betrag v der Geschwindigkeit und die Bewegungsenergie eines Erdsatelliten (m = 1000 kg), der in 1000 km Höhe eine Kreisbahn beschreibt.
b) Berechnen Sie, welche Energie man braucht, um ihn von der als ruhend gedachten Erdoberfläche in die Umlaufbahn zu bringen.
c) Begründen Sie, weshalb man Satelliten nahe am Äquator und nach Osten abschießt.

HA: S.103/A1,A2
und die drei Aufg.

Fluchtgeschwindigkeit

Welche kinetische Energie muss ein Körper haben, damit er das Gravitationsfeld des Zentralkörpers verlassen kann?
(D.h.: ... "um in das Unendliche zu gelangen")

$$\frac{1}{2}m \cdot v^2 = \gamma \cdot m \cdot M/R \quad \text{oder} \quad v = \sqrt{2\gamma \cdot M/R}$$

Aufgabe 1: Wie groß sind die Fluchtgeschwindigkeiten von Erde, Mond und Sonne?
Erde: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg, $R = 6380$ km,
Mond: $M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg, $R = 1740$ km,
Sonne: $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, $R = 696000$ km
Gravitationskonstante $\cancel{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(s^2kg)} = \gamma$

Aufgabe 2: Wie klein müsste die Erde sein, damit ihre Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist?
Masse der Erde: $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg,
Gravitationskonstante $\cancel{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(s^2kg)}, = \gamma$
Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s

Aufgabe 3: Wählen Sie jetzt statt der Erde einen Stern mit der Masse des Schwarzen Lochs im galaktischen Zentrum (4,3 Millionen mal die Masse der Sonne). Wie groß ist jetzt der kritische Radius?
Masse der Sonne: $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg,
Gravitationskonstante $\cancel{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(s^2kg)}, = \gamma$
Lichtgeschwindigkeit $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s

1.1. Ein Stein der Masse $m = 0{,}2\,kg$ wird an einer 0,5 m langen Schnur mit 2 Umdrehungen pro Sekunde auf einer horizontalen Kreisbahn herumgeschleudert.

$v = \frac{2\pi r}{T}$ $\quad f = 2\,Hz$

a) Welche kinetische Energie besitzt er? $E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = 4\,J$ $\quad T = \frac{1}{f} = 0{,}5\,s$

b) Welche Zentripetalkraft wirkt auf ihn ein? $F_z = m \frac{v^2}{r} = 15{,}8\,N$

c) Bei welcher Umdrehungsfrequenz $f = 1/T$ würde die Schnur reißen, wenn ihre maximale Reißfestigkeit 100 N beträgt?

$F_z = m \frac{v^2}{r} > 100\,N$ $\quad v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \cdot f$

$\Leftrightarrow m\, 4\pi^2 r\, f^2 > 100\,N$

$\Leftrightarrow f^2 > \frac{100\,N}{m\, 4\pi^2 r} \Rightarrow f > \sqrt{\ldots} = 5\,Hz$

1.2. Ein Körper der Masse $m = 0{,}5\,kg$ ist am einen Ende eines 2 m langen Fadens befestigt, während das andere Ende an einem Haken an der Zimmerdecke angebracht ist. Läßt man den Körper einfach hängen, so ist die im Faden wirkende Spannkraft offensichtlich gerade gleich der Gewichtskraft des Körpers. Der Körper wird nun bei gespanntem Faden entlang eines Kreisbogens um $\Delta h = 20\,cm$ angehoben und dann losgelassen.

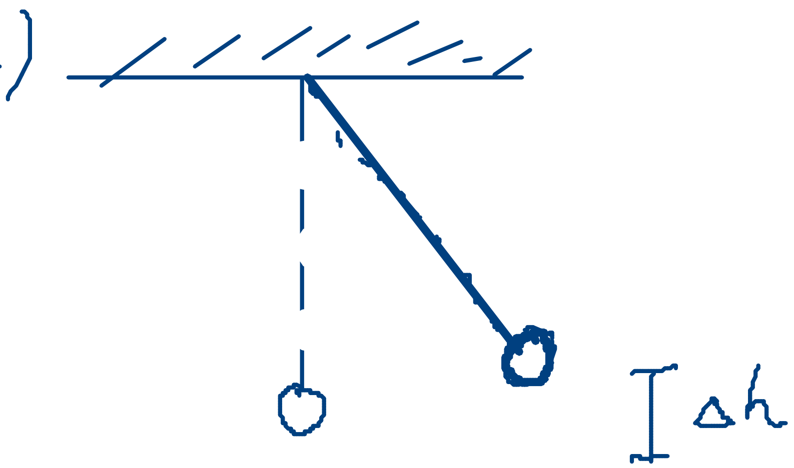
a) Skizziere den Aufbau zum Zeitpunkt $t = 0\,s$, also im Moment des Loslassens.

b) Ist die Spannkraft im Faden im Moment des Durchgangs durch den tiefsten Punkt größer, kleiner oder gleich der Gewichtskraft? Begründe deine Antwort.

c) Wie groß ist die Kraft in diesem Moment?

1.3. Das Elektron eines Wasserstoffatoms mit der Masse $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$ umkreist das Proton mit dem Bahnradius $r_e = 0{,}5 \cdot 10^{-10}\,m$. Dabei erfährt es die die Zentripetalkraft $F_Z = 8{,}8 \cdot 10^{-8}\,N$. Berechne seine Bahngeschwindigkeit v.

a)



b) $F_{ges} = F_G + F_Z > F_G$

c) $= m \cdot g + m\frac{v^2}{r}$

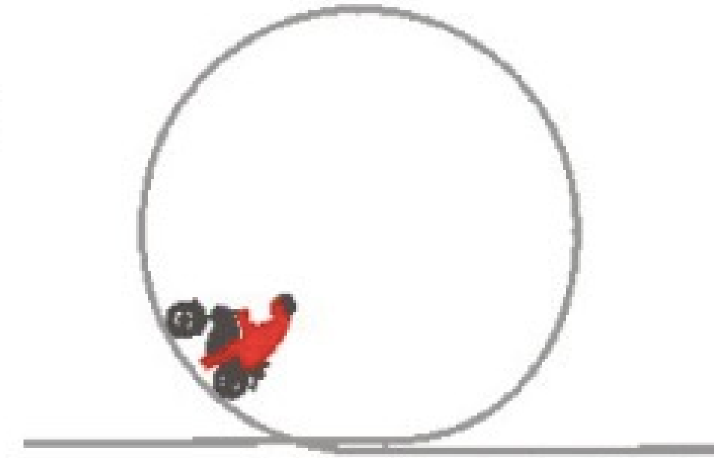
$= mg + m\,2g\Delta h/r = 5{,}9\,N$

$mg\Delta h = \frac{1}{2} m v^2$

$\Rightarrow v^2 = 2g\Delta h$

1.3. $F_Z = m\frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{F_Z \cdot r}{m}} = 2{,}2 \cdot 10^6\,m/s$

Looping (von engl.: loop = Schleife, Schlinge) *wird eine Fahr- oder Flugfigur genannt, bei der man einen vertikalen Kreis aufwärts fährt und sich oben „kopfüber" befindet.*

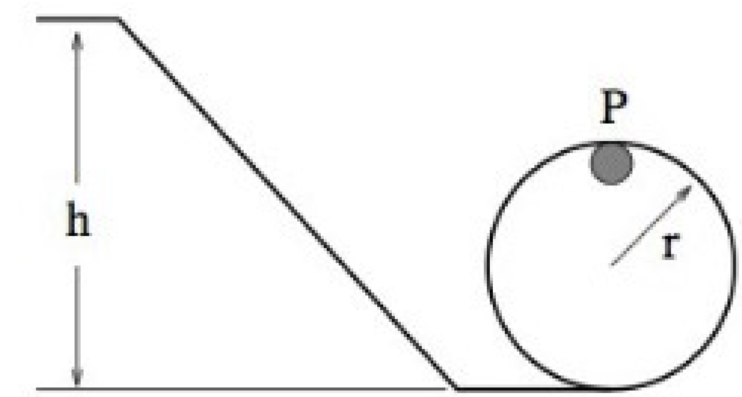


2.1. Zeige durch eine Rechnung, dass für die Geschwindigkeiten oben (v_o) und unten (v_u) folgende Bedingungen erfüllt sein müssen, damit der Motorradfahrer im oberen Punkt nicht abstürzt:

$$v_o > \sqrt{r \cdot g} \quad \text{und} \quad v_u > \sqrt{5 \cdot r \cdot g}$$

(Tipp: Die Energie unten muss nicht nur reichen, um die Höhe zu erreichen ...)

2.2. Aus welcher minimalen Höhe h muß ein Körper reibungsfrei die schiefe Ebene herunterrollen, damit er im Punkt P nicht herabstürzt? Der Radius der Kreisschleife sei r. *(Hinweis: Die Zeichnung zeigt eine schiefe Ebene mit angeschlossenem Looping.)*



2.1. oben: $F_Z > F_G \Rightarrow m\frac{v_o^2}{r} > mg \Rightarrow v_o^2 > rg$

$\Rightarrow v_o > \sqrt{rg}$

unten: $E_{kin,u} = E_{kin,o} + E_{Lage}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_u^2 = \frac{1}{2} m v_o^2 + mg2r$

$\Leftrightarrow v_u^2 = v_o^2 + 4gr > rg + 4rg = 5rg$

$\Rightarrow v_u > \sqrt{5rg}$

2.2.5. HA