Q1PhLk_Sonntag

Exkurs „Komplexe Zahlen, Fraktale Geometrie, Folgen, Reihen, Taylorentwicklung"

Für unendlich oft differenzierbare Funktionen f(x) ist die Taylorreihe[1] definiert als

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \qquad mit\ f^{(n)}(0)=Funktionswert\ der\ n-ten\ Ableitung\ von\ f\ an\ der\ Stelle\ 0\,;$$

$[n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\ \ (sprich: 'n\ Fakultät');\ \ 0!=1]$.

Herleitung der Eulerschen Relation mit Hilfe der Taylorreihen von $e^{i\varphi}$, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$:

$$e^{i\varphi}=\frac{1}{1}\cdot 1+i\,\frac{1}{1!}\cdot\varphi-\frac{1}{2!}\cdot\varphi^2-i\,\frac{1}{3!}\varphi^3+\frac{1}{4!}\varphi^4+i\,\frac{1}{5!}\varphi^5\ \ldots$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{1}\,1-0-\frac{1}{2!}\varphi^2+0+\frac{1}{4!}\varphi^4\ldots$$

$$\sin\varphi=0+\underbrace{\frac{1}{1!}\varphi}_{\cdot i}-0-\underbrace{\frac{1}{3!}\varphi^3}_{\cdot i}+0+\underbrace{\frac{1}{5!}\varphi^5}_{\cdot i}\ldots$$

$$\Rightarrow e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi$$

Ableitung	$e^{i\varphi}$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
0.	$e^{i\varphi}$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
1.	$i\,e^{i\varphi}$	$-\sin\varphi$	$\cos\varphi$
2.	$i^2e^{i\varphi}=-e^{i\varphi}$	$-\cos\varphi$	$-\sin\varphi$
3.	$-i\,e^{i\varphi}$	$\sin\varphi$	$-\cos\varphi$
4.	$e^{i\varphi}$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$
5.	$\vdots$		$\cos\varphi$
			$-\sin\varphi$