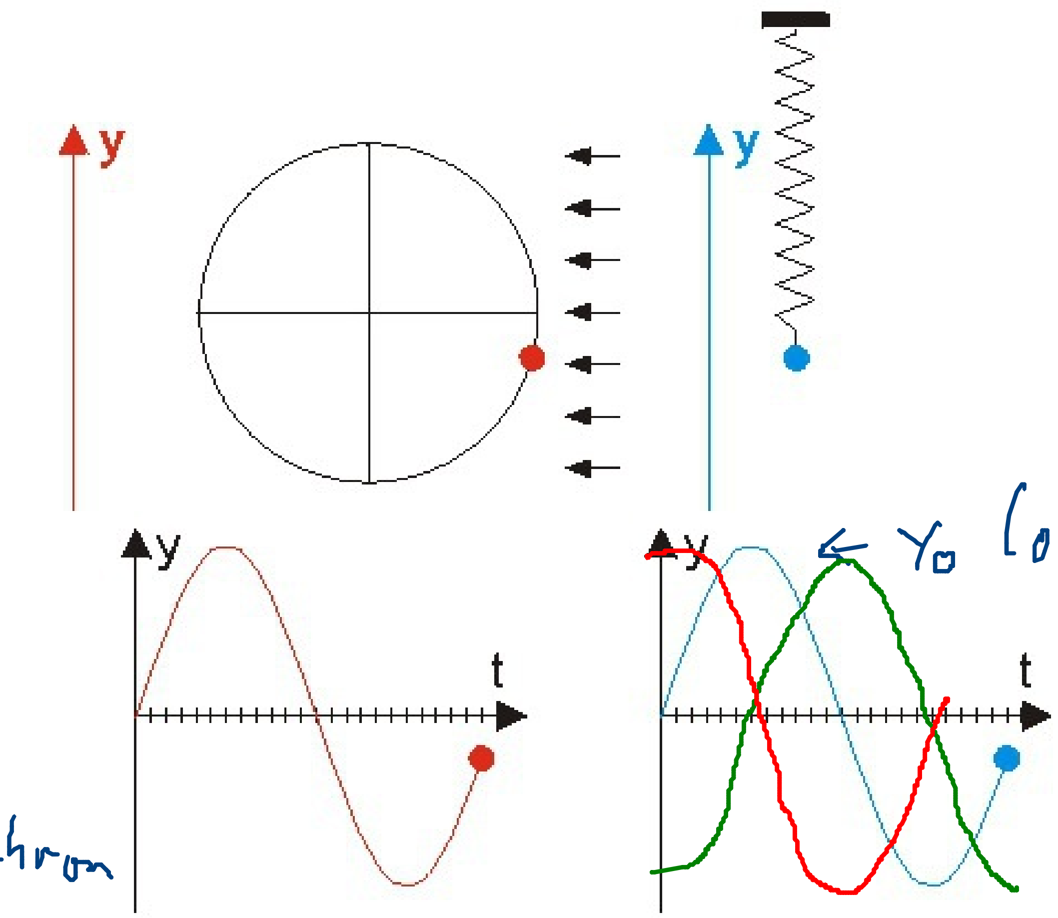
Harmonische Schwingungen

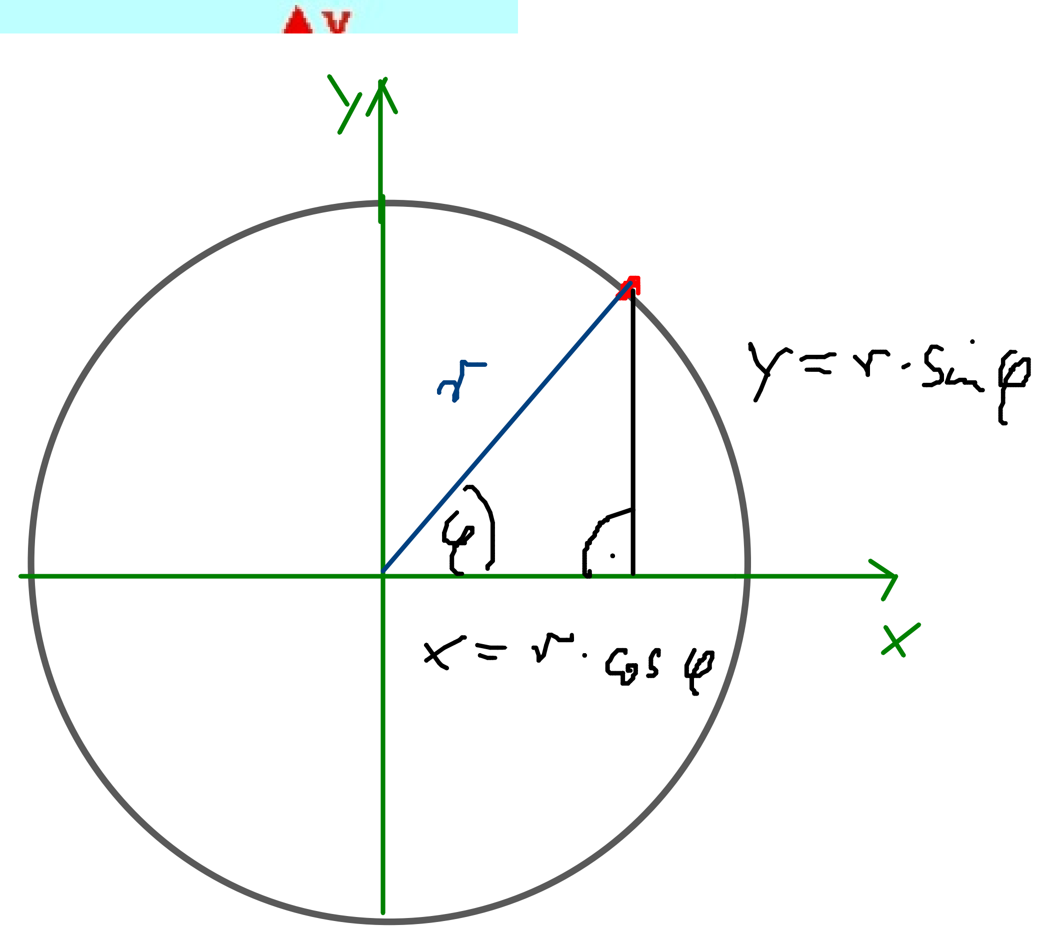
Definition
Schwingungen sind Vorgänge, bei denen sich ein physikalischer Zustand zeitlich periodisch verändert.

Der wichtigste Schwingungstyp ist die ***harmonische Schwingung*** oder ***Sinusschwingung.*** Er tritt z. B. bei der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung oder bei der Schwingung eines Federpendels auf.



← y_0 (oder y_{max} oder $\hat{y}$)

Synchron



$\Rightarrow$ In beiden Fällen $y = y_0 \cdot \sin\varphi$

Wenn eine gleichförmige Kreisbew. vorliegt:
$\omega = \text{konst.} \Rightarrow \varphi = \omega \cdot t$

$\cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{x}{r}$

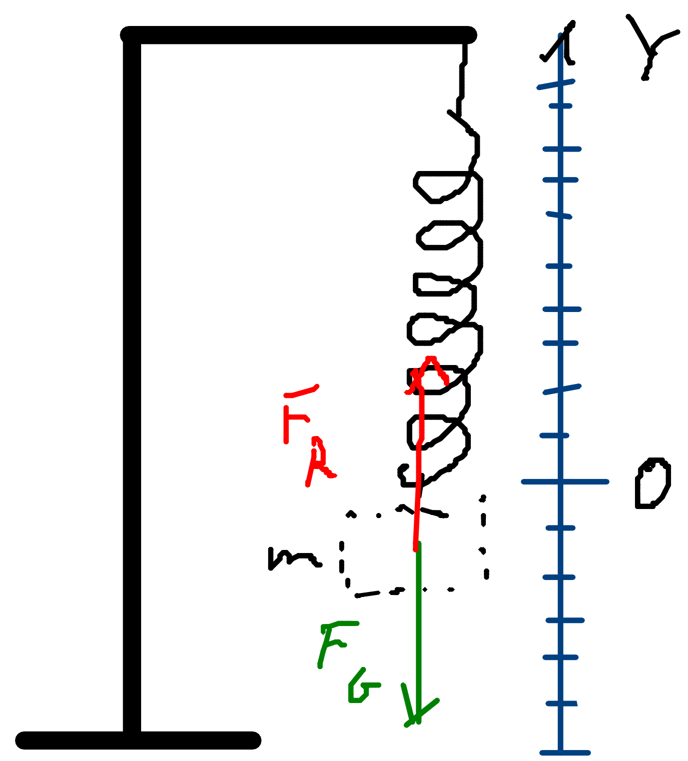
$\Rightarrow \quad y(t) = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ Je nach Startbedingung!!!

$\sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hyp.}} = \frac{y}{r}$

oder $y(t) = y_0 \cos(\omega \cdot t)$ oder $y(t) = -y_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$
$= -y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2})$

Bezeichnungen		***Beziehungen***
y(t): Elongation	T: Schwingungsdauer	
$\hat{y}$: Amplitude	f: Schwingungsfrequenz	$T = \frac{1}{f} \quad \omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}$
ω: Kreisfrequenz	[redacted]	

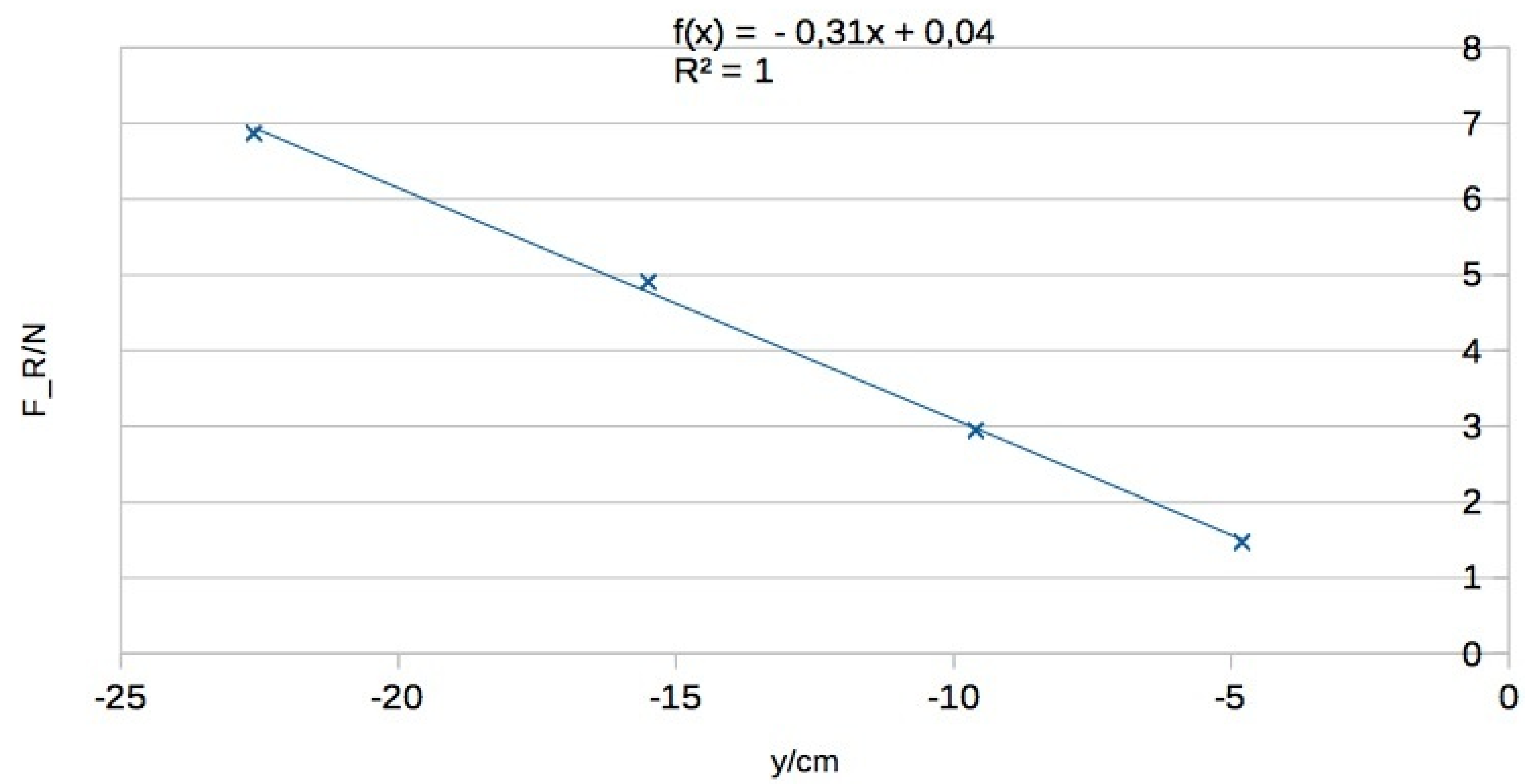
Kräfte beim Federpendel - Das Hooksche Gesetz



$\leftarrow$ Massenstücke $\Rightarrow F_G \Rightarrow F_R = -F_G \quad , \quad F_G = m \cdot g$

Rückstellkraft

m/kg	F_R/N	Y/cm
0,15		-4,8
0,3		-9,6
0,5		-15,5
0,7		-22,6



F ist proportional zu y (Verlängerung der Feder): Hooksches Gesetz
Die Proportionalitätskonstante nennt man Federkonstante D.

$$\boxed{F_R = -D \cdot Y}$$

Die Thomsonsche Schwingungsgleichung

$$y = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \qquad (\dot{y} = \text{zeitl. Ableitung von } y)$$

$$= \frac{d}{dt}(y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)) = y_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{d}{dt}(y_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)) = -y_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

$$= -\omega^2 y \qquad (*)$$

Kettenregel

$$\left(\sqrt{x^3}\right)' = 3x^2 \frac{1}{2} (x^3)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)'$$

$$= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

---

allg. $\quad F = m \cdot a$

Federpendel: $\quad F = -D \cdot y \quad$ „Hookesches Gesetz"

also $\quad m \cdot a = -D \cdot y$

a ist die zweite Abl. des Ortes nach d. Zeit: $\quad m \cdot \ddot{y} = -D y \Leftrightarrow \ddot{y} = -\frac{D}{m} \cdot y$

Vgl. mit $(*)$: $\quad \omega^2 = \frac{D}{m} \Leftrightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{D}{m}} \Leftrightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$

$$\Leftrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Experimentelle Bestätigung der Thomsonschen Schwingungsgleichung für Federpendel

$$\omega^2 = \frac{D}{m} \Leftrightarrow 2\pi f = \sqrt{\frac{D}{m}} \Leftrightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

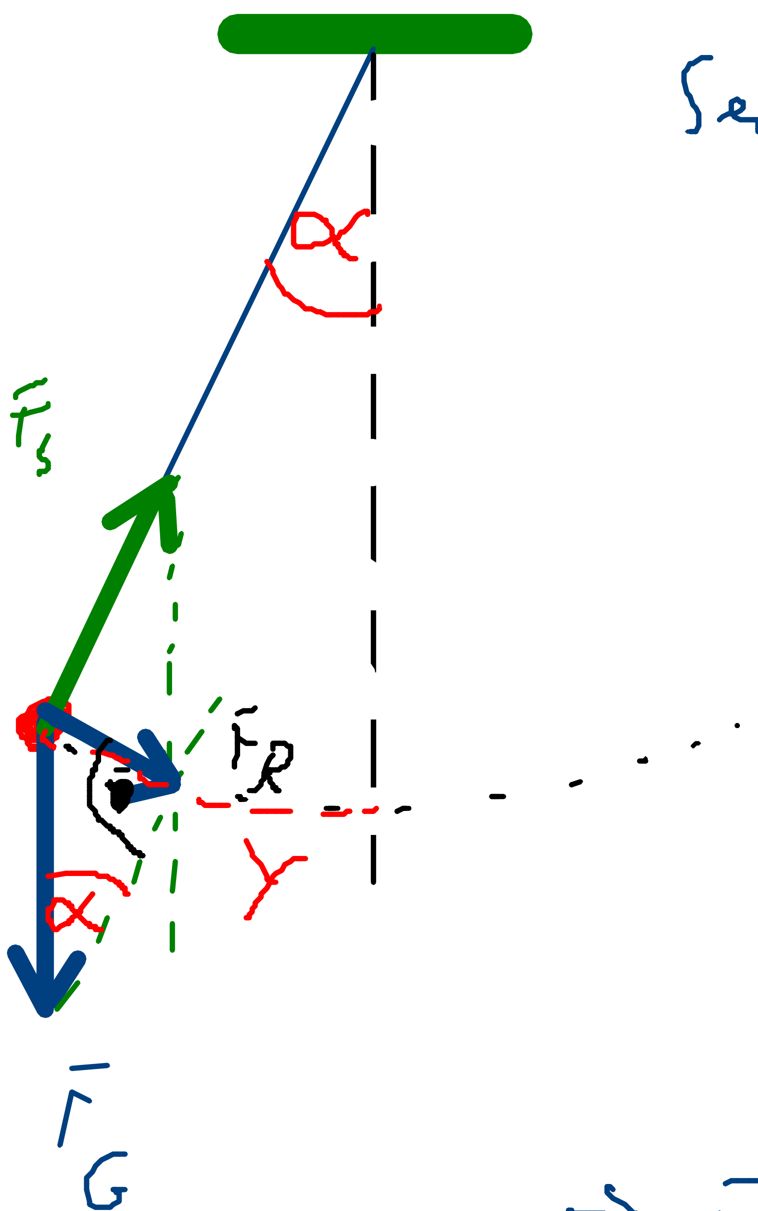
$$\Leftrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Material:
Schraubenfeder, Massen, Waage, Stoppuhr, Stativm.

Durchführung:
1. Bestimme die Federkonstante D.
2. Erzeuge mit einer Pendelmasse m deiner Wahl eine Schwingung und miss die Frequenz f.
3. Berechne die zu erwartende Schwingungsfrequenz mit Hilfe der Thomsonschen Schw.-Gl. und verleiche sie mit der in 2. experimentell ermittelten.

D in N/m	m in kg	$f=1/2\pi \cdot \sqrt{D/m}$ in Hz	$f=n/t$ in Hz
40	0,5	1,42	1,34
	0,65	1,24	1,19
	0,7	1,2	1,15
50,5	0,5	1,6	1,64
36	0,5	1,35	1,37
52,3	0,6	1,4	1,1

Das Fadenpendel
(mathematisches Pendel)



Seillänge l

$$\sin\alpha = \frac{F_R}{F_G} \Leftrightarrow F_R = F_G \sin\alpha$$

$$\alpha = \frac{y}{l}$$

bis $\alpha^\circ = 20^\circ$ gilt

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

$$\Rightarrow F_R = -\frac{m\cdot g}{l}\cdot y$$

vgl. Federpendel: $F_R = -Dy$

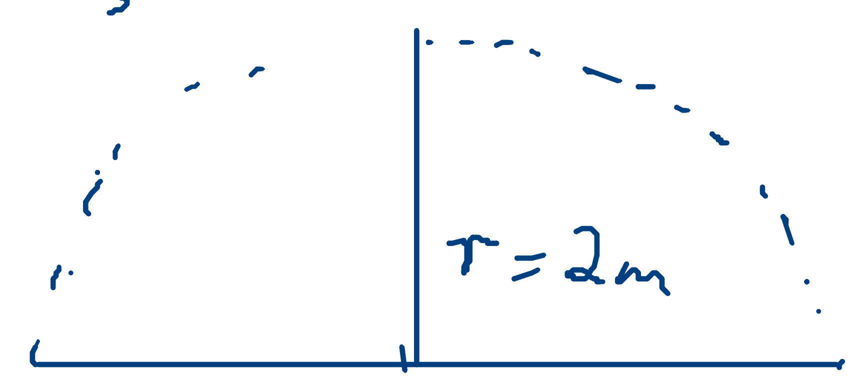
d.h. $D \hat{=} \frac{m\cdot g}{l}$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \hat{=} \boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m\cdot g}{l\cdot m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{g/l} \quad \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{l/g}}$$

Thomsonsche Schwingungsgleichung für das Fadenpendel

Exkurs Bogenmaß

$s = \pi\cdot r$ | allg.: Bogen $= \alpha\cdot r$



$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} = \frac{\alpha}{2\pi}$$

$$\alpha = \frac{\alpha^\circ\cdot\pi}{180^\circ}$$

Stimmt die unter vielen Idealisierungen gewonnene Thomsonsche Schw.-Gl. mit der Realität überein?

l/m	T/s	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ in s	f/Hz	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$ in Hz
1,29	2,277	2,278		
0,88	1,89	1,88		
0,65	1,69	1,61		
0,51	1,54	1,43		
0,7	1,723	1,678		
0,8	1,79	1,74		
0,35	1,29	1,19		