Massendefekt

Bindungsenergie pro Nukleon

Beobachtung: Atomkerne sind leichter als die Summe ihre Teile (Nukleonen).
Die als Massendefekt Δm bezeichnete Differenz liefert gemäß $E = \Delta m\, c^2$ die zur Bindung der Nukleonen nötige Energie.

Die **Bindungsenergie** $E_B = \Delta m\, c^2$ eines Kerns ist diejenige Energie, die dem Massendefekt äquivalent ist, der beim Zusammenfügen des Kerns aus einzelnen Nukleonen entsteht. Sie wird bei der Bildung des Kerns aus den Nukleonen frei.
Derselbe Energiebetrag, der zugeführt werden muss, um einen Kern in seine Nukleonen zu zerlegen, wird als **Separationsenergie** bezeichnet.

$$\boxed{\Delta m = Z \cdot (m_p + m_e) + N \cdot m_n - m_A}$$

$$\left(= Z \cdot m_H + N\, m_n - m_A \right)$$

Z = Kernladungs- oder Ordnungszahl
$N = A - Z$ = Anz. d. Neutronen, A = Massenzahl
m_p = Masse d. Protons
m_e = " " Elektrons
m_n = " " Neutrons
m_H = " " Wasserstoffatoms
m_A = " " Atoms, von dem Δm berechnet wird

Aufg. 499/1 (GTR)

A Z	B N	C m_A	D Δm
1	2	3,016049	=A1 1,673532575E-27 + B1 · 1,674927211E-27 − C1
2	1	1,6603588E-27	Cell Range: D1 : D7
7	7		
8	8		
10	10		
12	12		
14	14		

E: $= D1\ 3E8^2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$

F: $= E1\ (A1 + B1)$

^{3}H: 2,83 MeV pro Nukleon
^{3}He: 2,57 MeV pro Nukleon
^{14}N: 7,48 MeV; ^{16}O: 7,98 MeV; ^{20}Ne: 8,03 MeV;
^{24}Mg: 8,26 MeV; ^{28}Si: 8,45 MeV

Altersbestimmung der Erde

Gehen Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe davon aus, dass bei der Bildung der festen Erdkruste Gesteine entstanden, die Uran, aber kein Blei enthielten.

Man kann die seit dem Zeitpunkt der Entstehung der Gesteine ($t = 0$) vergangene Zeit, d. h. das Alter der Gesteinsprobe, dann aus dem Verhältnis der Kerne U-238 und Pb-206 in Proben dieser Gesteine ermitteln.

Die Anzahl der Kerne des Mutterelements Uran nimmt ab nach der Beziehung:

$N_M(t) = N_{M_0} \cdot e^{-\lambda t}$, (**)

wobei λ die Zerfallskonstante ist.

- Leiten Sie daraus folgende Gleichung für das Alter der Gesteinsprobe her.

$$t = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(1 + \frac{N_T(t)}{N_M(t)}\right)$$

Das Alter der ältesten gefundenen Gesteinsprobe kann man in etwa mit dem Alter der Erde gleichsetzen. In einer solchen Probe wurde für das Verhältnis der Anzahl der Kerne von Pb-206 und U-238 der Wert $\frac{N_{Pb-206}}{N_{U-238}} = 1{,}02$ bestimmt.

- Berechnen Sie das Alter der Erde. *(9 Punkte)*

(oder (**) in (*) einsetzen, oder umgekehrt)

$$N_T(t) = N_{M_0} - N_M(t) \quad (*)$$

(*) u. (**) nach N_{M_0} auflösen:

$$\left.\begin{aligned} (*):&\quad N_T + N_M = N_{M_0} \\ (**):&\quad N_M \cdot e^{\lambda t} = N_{M_0} \end{aligned}\right\} \text{gleichsetzen}$$

$$N_T + N_M = N_M \cdot e^{\lambda t} \quad | : N_M$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_T + N_M}{N_M} = e^{\lambda t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_T}{N_M} + 1 = e^{\lambda t} \quad | \ln$$

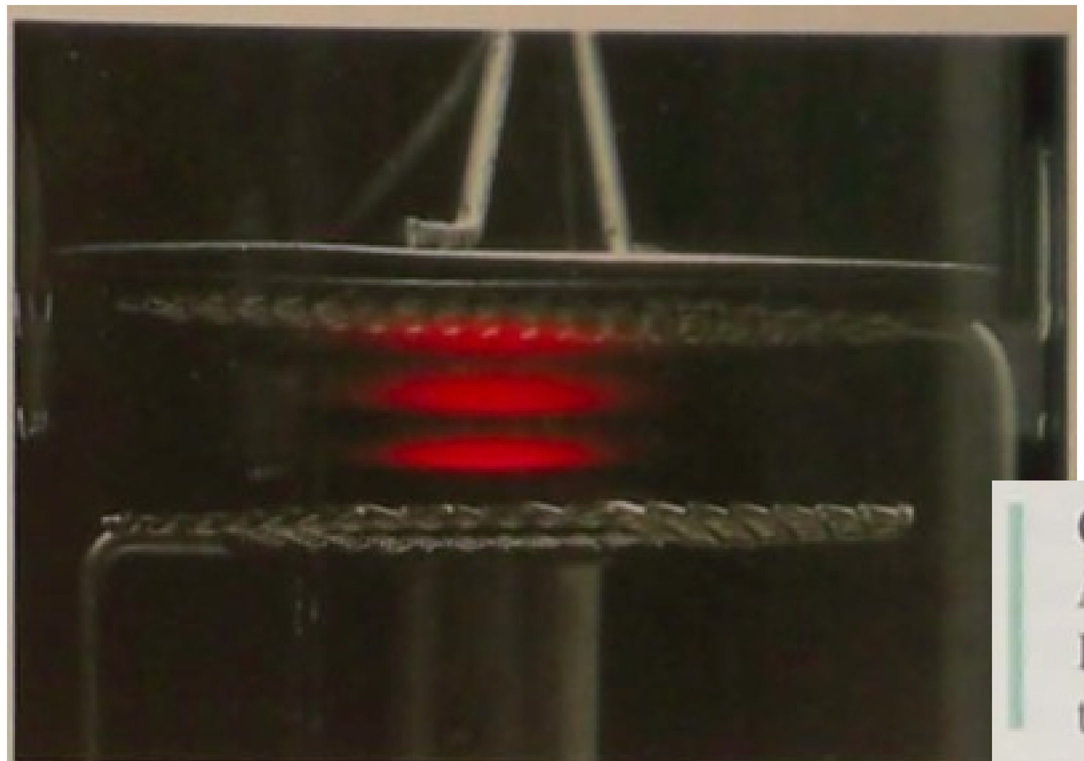
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{N_T}{N_M} + 1\right) = \lambda t \qquad \left[\frac{1}{\lambda} = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{N_T}{N_M} + 1\right) = t \quad \text{q.e.d.}$$

$$\frac{N_T}{N_M} = \frac{N_{Pb}}{N_U} = 1{,}02 \Rightarrow t = 4{,}53 \cdot 10^9\,a$$

(Bill Bryson, Die exakten Geheimnisse von fast allem oder so ähnlich)

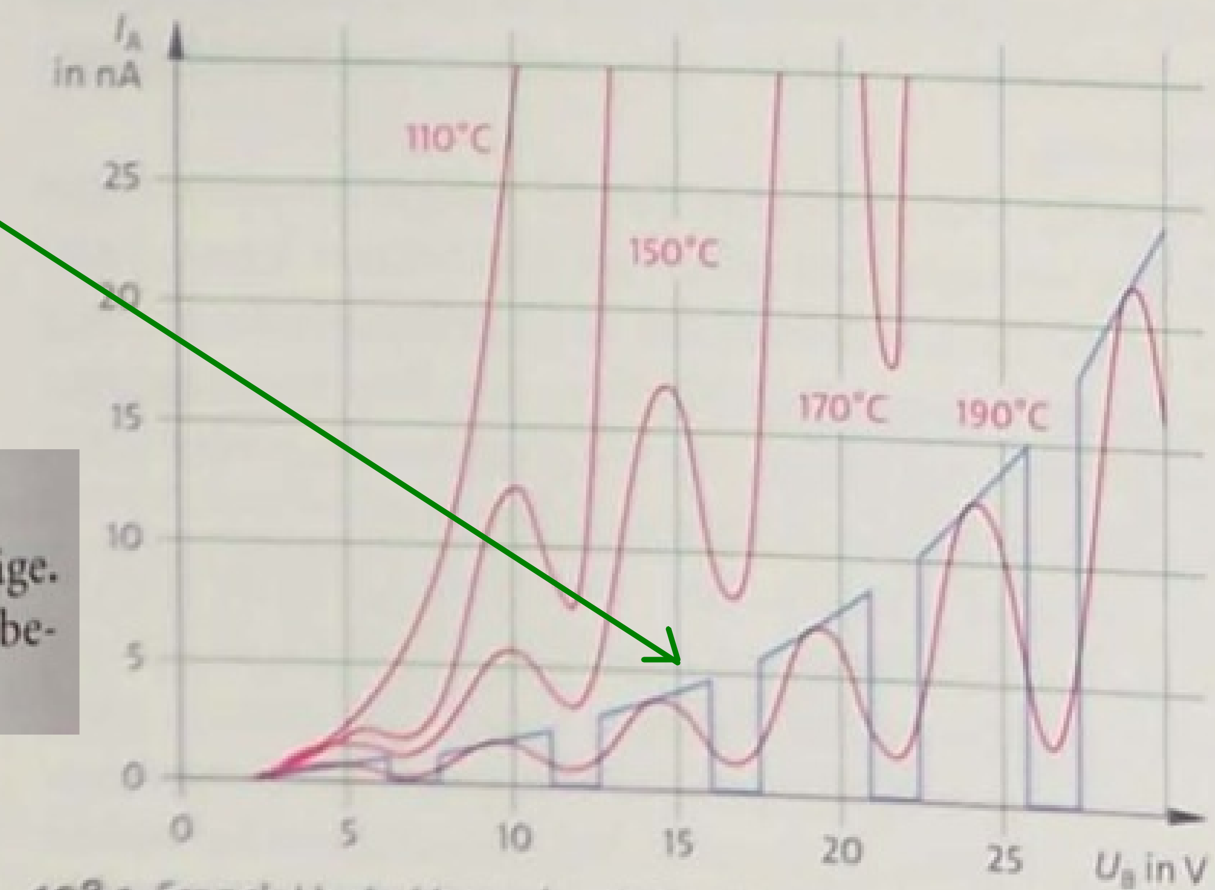
Die quantenhafte Absorption: Der Franck-Hertz-Versuch



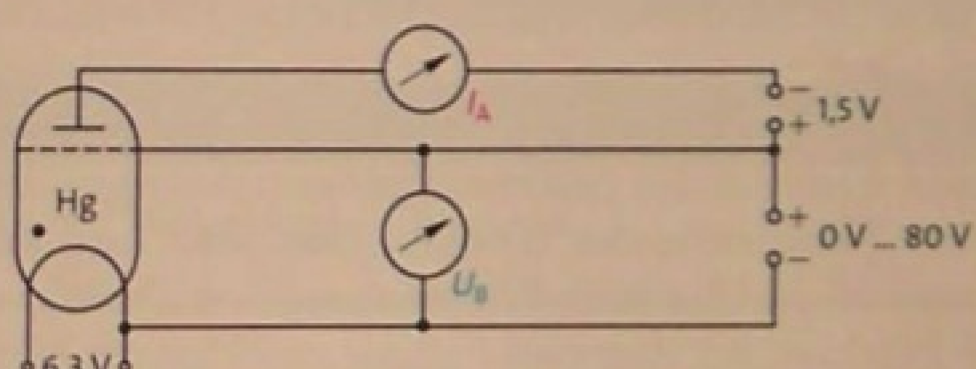
407.1 Franck-Hertz-Versuch mit Neon: Leuchtschichten bei einer Beschleunigungsspannung von 80 V

Qualitativ sieht der I-U-Graph bei Neon ähnlich aus, nur dass die Maxima einen Abstand von ca. 20 V haben.

Quantenhafte Absorption
Atome absorbieren nur bestimmte Energiebeträge. Die Energiebeträge sind charakteristisch für das betreffende Atom.



408.1 Franck-Hertz-Versuch mit Quecksilberdampf: Der Strom I_A wird in Abhängigkeit von der Beschleunigungsspannung U_B gemessen. Die Messkurven bei verschiedenen Temperaturen zeigen den Verlauf für unterschiedliche Konzentrationen von Quecksilberdampf. Der Wendepunkt der Graphen ($T > 120$ °C) bei ca. 4 V zeigt an, dass erste Elektronen ihre Energie an Quecksilberatome abgeben. Für die Temperatur 190 °C ist in Blau zusätzlich der idealisierte Verlauf des Stromes I_A eingezeichnet.

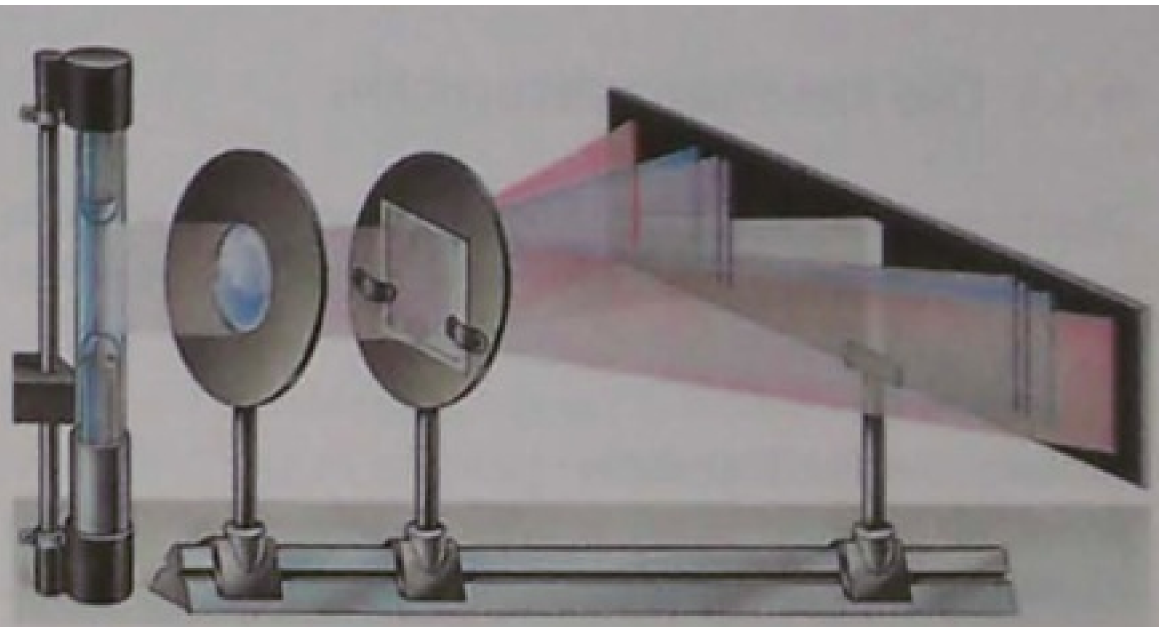


407.2 Schaltbild zum Franck-Hertz-Versuch mit Quecksilberdampf

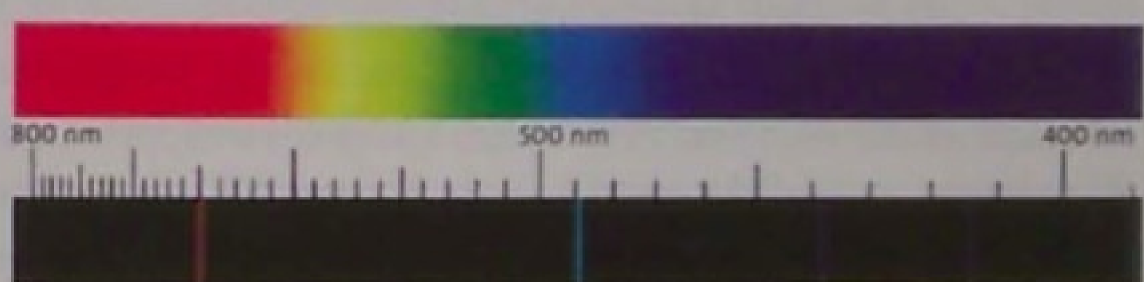
Wenn die Elektronen durch die Beschl.-Spannung genügend Energie erhalten haben, absorbiert das Gas diese Energie und beginnt zu leuchten. Die Elektronen besitzen dann nicht mehr genug Energie, um gegen die kleine Gegenspannung zw. Gitter und Anode anzukommen: die Stromstärke sinkt.

Wenn sie nach der Energieabgabe durch die erneute Beschl. wieder den entspr. Energiewert erreichen, geben sie diese zum 2. Mal vollständig an die Gasatome ab: es entsteht die 2. Leuchtschicht, die Stromstärke erreicht erneut ein lokales Minimum usw.

Die quantenhafte Emission:
Die Balmer-Formel



409.1 Einfacher Versuchsaufbau zur Demonstration des Wasserstoffspektrums. Auf dem Schirm erscheint das Hauptmaximum in der Mitte und links und rechts davon die vier Linien im Spektrum erster Ordnung.



Linie	Wellenlänge λ in nm	Frequenz f in Hz	Energie $E = hf$
H_α	656	$4{,}57 \cdot 10^{14}$	$3{,}03 \cdot 10^{-19}$ J = 1,89 eV
H_β	486	$6{,}17 \cdot 10^{14}$	$4{,}09 \cdot 10^{-19}$ J = 2,55 eV
H_γ	434	$6{,}91 \cdot 10^{14}$	$4{,}58 \cdot 10^{-19}$ J = 2,86 eV
H_δ	410	$7{,}31 \cdot 10^{14}$	$4{,}84 \cdot 10^{-19}$ J = 3,02 eV

409.2 Linien des Wasserstoffspektrums im sichtbaren Bereich im Vergleich zu dem kontinuierlichen Spektrum einer Glühlampe

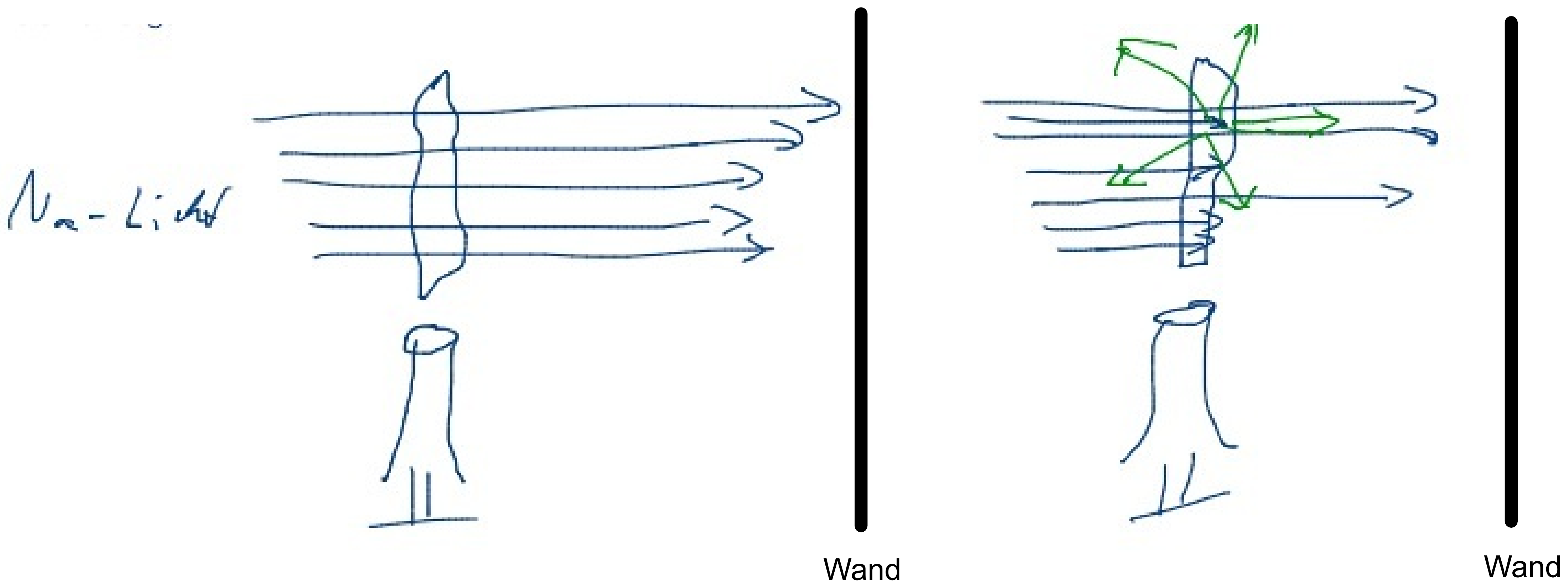
J. J. BALMER fand 1884 das Bildungsgesetz

$$f = C\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{m^2}\right),$$

die sogenannte **Balmer-Formel** mit der Konstanten $C = 3{,}288 \cdot 10^{15}$ Hz. Durch Einsetzen von $m = 3, 4, 5$ und 6 erhält man die Frequenzen f der vier bekannten Wasserstofflinien im sichtbaren Teil des Spektrums. BALMER vermutete, dass seine Formel ein Spezialfall einer allgemeineren Gleichung sei, die auch für andere Elemente als Wasserstoff gelte. Die Spektren von Atomen mit nur einem Elektron bestätigen die Vermutung. Die physikalische Bedeutung der Konstanten m in der Balmer-Formel wurde durch dieses Vorgehen jedoch nicht geklärt.

Die Balmer-Formel sowie die Bedeutung von m werden Ergebnisse des Bohrschen Atommodells sein.

Die Resonanzabsorption:
Absorption von Natriumlicht durch eine Natriumflamme



Dadurch, dass die Na-Atome im NaCl das Na-Licht absorbieren und in alle Richtungen emittieren, leuchtet die Flamme gelb, und es kommt weniger Licht auf der Wand an: die Projektion der Flamme ist dunkler als die Umgebung.

> Atome absorbieren genau diejenigen Energiebeträge, die sie auch emittieren.

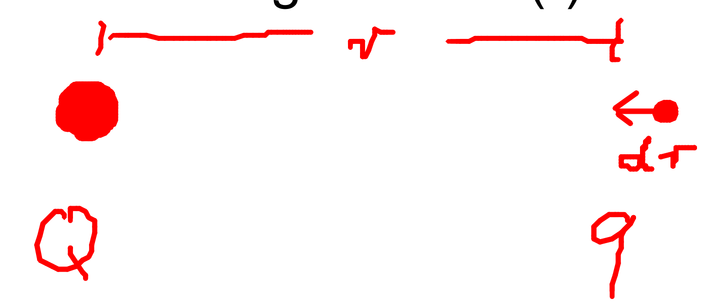
Das Bohrsche Atommodell

Herleitung der diskreten Energiewerte der Elektronen im Wasserstoffatom

(Wdh., s. 5.2.2.) Um die potentielle Energie einer Ladung q im Feld einer Ldg. Q zu berechnen, bedient man sich eines Tricks: Man berechnet die Arbeit, die man verrichten muss, um q aus dem Unendlichen, wo die Kraft 0 ist, zu einem Punkt im Abstand r zu verschieben. Zwar ändert sich F(r) auf dem Weg ständig, wird aber auf dem Wegintervall dr als konstant angesehen. Die Gesamtarbeit (= potentielle Energie von q) ergibt sich dann als Summe der vielen Teilbeträge dW = F(r) · dr :

(*Da $d\vec{r}$ hier $\vec{r}$ entgegengerichtet ist, müssen wir in das Integral ein Minuszeichen setzen.*)

$$W=\int_{\infty}^{r}\vec{F}(r)\cdot d\vec{r}=\int_{\infty}^{r}-F(r)\cdot dr=\int_{\infty}^{r}\frac{-qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cdot dr=-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\cdot\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}\cdot dr=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r}\Big|_{\infty}^{r}=\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r}$$



Bohrsche Postulate:

1. Bohr'sches Postulat (Quantenbedingung)
Im Atom bewegen sich Elektronen strahlungsfrei auf stationären Bahnen. Diese Bahnen sind durch den Bahndrehimpuls $L = r m_e v$ (→ 1.4.2) bestimmt, der nur Vielfache von $h/(2\pi)$ annimmt:

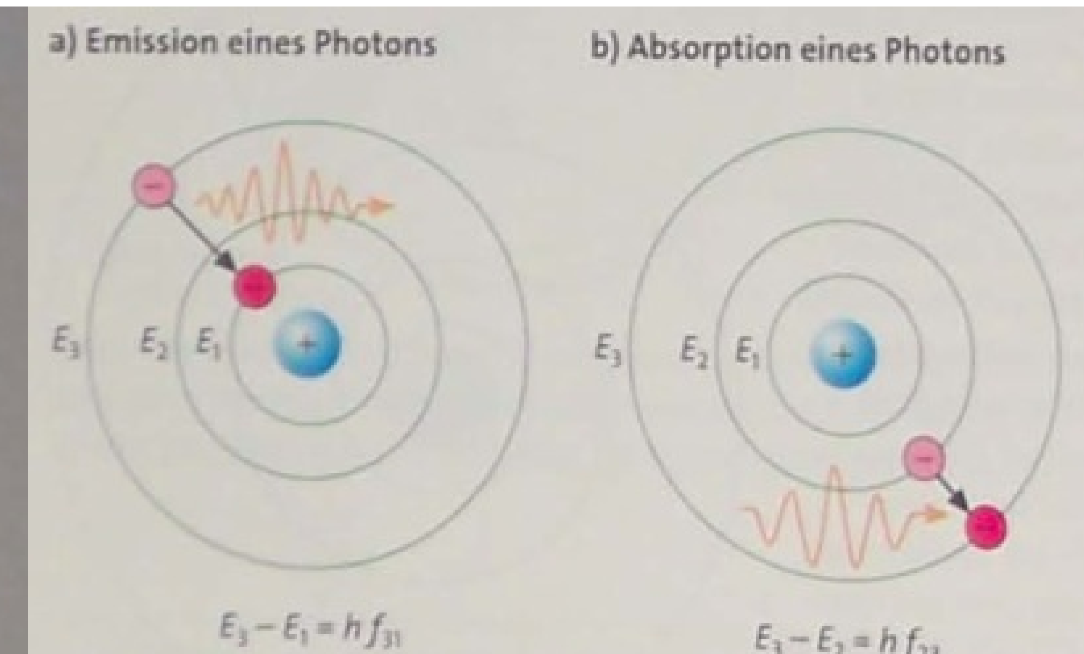
$$L_n = n\frac{h}{2\pi} \quad \text{mit} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

n ist die Quantenzahl, die die Bahn bestimmt.

2. Bohr'sches Postulat (Frequenzbedingung)
Beim Übergang des Elektrons von einer stationären Bahn zu einer anderen wird Energie abgegeben (Emission) oder aufgenommen (Absorption). Die Energieabgabe ΔE des Atoms an ein Photon beträgt beim Übergang des Elektrons von einer Bahn hoher Energie E_m zu einer Bahn geringer Energie E_n (Emission)

$$\Delta E = E_m - E_n = hf.$$

Beim umgekehrten Vorgang wird ein Photon der Energie hf aufgenommen (Absorption), siehe **Abb. 414.1**.



414.1 Vorstellungen nach dem Bohr'schen Atommodell:
a) Das Elektron emittiert ein Photon.
b) Das Elektron absorbiert ein Photon.

Energie des Elektrons auf der Bahn n:

$$E_n = E_{kin,n} + E_{pot,n} = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$$

v_n u. r_n noch unbekannt

Coulombkraft = Zentripetalkraft

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n^2} = m\frac{v_n^2}{r_n} \Leftrightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} = m r_n v_n^2 = L\cdot v_n = n\frac{h}{2\pi}\cdot v_n \Rightarrow v_n = \frac{e^2\, 2\pi}{4\pi\varepsilon_0\, h\, n} = \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h}\cdot\frac{1}{n}$$

1. Postulat

$$r_n = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m e^2}\, n^2$$

Ergebnis: nächste Seite

Nach dem 2. Bohr'schen Postulat besitzt das Wasserstoffatom diskrete Energiezustände E_n, die sich aus den unterschiedlichen Bahnen des Elektrons ergeben:

$$E_n = -\frac{1}{8}\frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}$$

Für $n = 1$, den Grundzustand, beträgt die Energie $E_1 = -2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\text{J} = -13{,}6\,\text{eV}$.
Befindet sich das Elektron auf der n-ten Bahn, so lässt sich die Energie E_n des Atoms aus der im Grundzustand berechnen:

$E_n = E_1 \frac{1}{n^2}$ oder $\boxed{E_n = -13{,}6\,\text{eV} \cdot \frac{1}{n^2}}$

Bahnradius r_n und Energie E_n hängen also nur von n und von Naturkonstanten ab. Die Quantenzahl n bestimmt den Energiezustand des Atoms.

$$E_n = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$$

$$= \frac{1}{2} m \frac{e^4}{4\varepsilon_0^2 h^2 n^2} - \frac{e^2 \pi m e^2}{4\pi\varepsilon_0 h^2 \varepsilon_0 n^2}$$

$$= \frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2 n^2} - \frac{2 \cdot e^4 m}{8 \varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{8} \frac{m e^4}{\varepsilon_0^2 h^2}}_{= -2{,}18 \cdot 10^{-18}\,\text{J} = -13{,}6\,\text{eV}} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Bsp.: e^- fällt von $\overset{n=}{3/4/5}$ auf $\overset{m=}{2}$: $\Delta E = E_n - E_m$

$$= 13{,}6\,\text{eV} \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)$$

bzw. $\frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}$

$$= 3{,}02 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$$

$$\Rightarrow f = \frac{\Delta E}{h} = 4{,}57 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

Entspricht exakt den Ergebnissen der Balmer-Formel!