Nachtrag Compton-Effekt

$\Delta\lambda = 2 \cdot \frac{h}{mc}$ maximal

$= 4{,}86 \cdot 10^{-12}\,m$

1.5. Berechne die Wellenlänge der Photonen, die einem Elektron beim Compton-Effekt höchstens eine Geschwindigkeit von 0,2 c verleihen, sodass man auf eine relativistische Rechnung verzichten kann.

$$E_e = E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \Delta E = E_{Ph} - E_{Ph}' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = \frac{\Delta\lambda \cdot hc}{\lambda\lambda'}$$

$$= \frac{1}{2} m (0{,}2c)^2 = 1{,}64 \cdot 10^{-15}\,J \qquad = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda(\lambda+\Delta\lambda)} = \frac{hc\Delta\lambda}{\lambda^2 + \lambda\Delta\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^2 + \lambda\Delta\lambda = \frac{hc\Delta\lambda}{E_e} \qquad \Big|\ \text{quadr. Ergänz.: } +\left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2$$

(vgl. bin. F. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda^2 + \lambda\Delta\lambda + \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2 = \frac{hc\Delta\lambda}{E_e} + \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2 = \quad ''$$

$$\Rightarrow \quad \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2} = \pm\sqrt{\frac{hc\Delta\lambda}{E_e} + \left(\frac{\Delta\lambda}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\Delta\lambda}{2} \pm \sqrt{\quad '' \quad} = -2{,}43 \cdot 10^{-12}\,m \pm 2{,}44 \cdot 10^{-11}\,m$$

physikal. sinnvoll: $= 2{,}44 \cdot 10^{-11}\,m - 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,m = \underline{\underline{2{,}2 \cdot 10^{-11}\,m}}$

~~alternativ: GTR~~

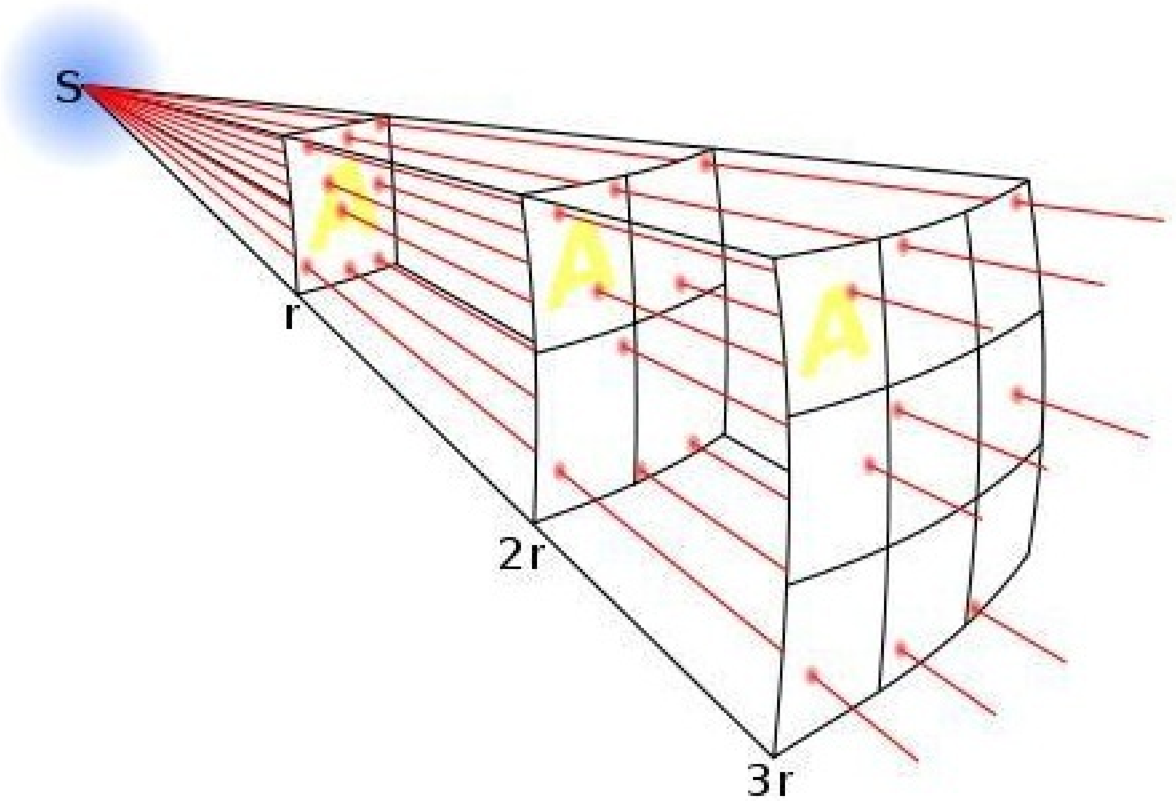
Radioaktivität und Kernphysik

$$\text{Zählrate} = \frac{\text{Ereignisse}}{\text{min}}$$

Daraus lässt sich die Aktivität $= \dfrac{\text{radioakt. Zerfälle}}{\text{Zeit}}$ berechnen.

$$A = \frac{\Delta N}{\Delta t}, \quad [A] = \frac{1}{s} =: \text{Bq} \quad (\text{Becquerel})$$

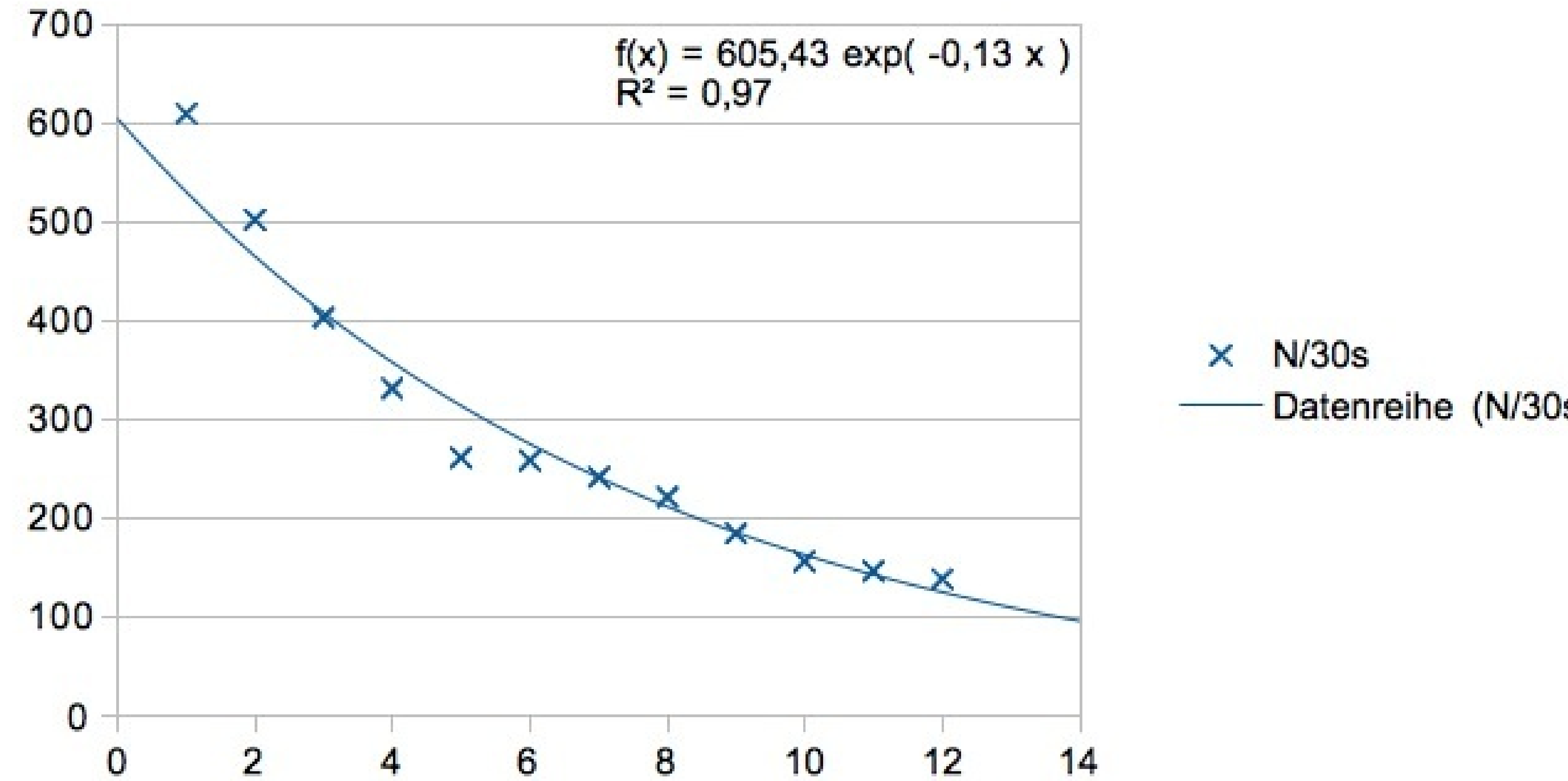
Quadratisches Abstandsgesetz



=> möglichst großen Abstand halten!

Abschwächung/Abschirmung durch Materie

exponentieller Abfall der Zählrate in Abhängigkeit von der Anzahl der Papierstreifen:



$$N(x) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

λ = Schwächungskoeffizient

$$N(x) = N_0 \cdot \frac{1}{2}^{x/x_{1/2}} = N_0 \cdot 2^{-x/x_{1/2}} = N_0 \cdot e^{-x/x_{1/2} \cdot \ln 2}$$

$$= N_0 \cdot e^{-\lambda x}$$

$x_{1/2}$ = Halbwertsdicke

(im Bsp.: „Halbwertsblattzahl")

$$\Rightarrow \frac{-x}{x_{1/2}} \cdot \ln 2 = -\lambda x$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{x_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}}$$

$$a^x = e^{x \cdot \ln a} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln a^x = x \cdot \ln a$$

$$\Leftrightarrow x \cdot \ln a = x \cdot \ln a$$

Bsp.: $\lambda = 0{,}13$

$\Rightarrow x_{1/2} = 5{,}3 \approx 5$, d.h. nach 5 Blättern halbiert sich N.

Sandkörner und Muschelatome - Fermi-Aufgabe[1]

Gibt es an einem Strand mehr Sandkörner als Atome in einer Muschel sind? Machen Sie für diese Abschätzung vernünftige Annahmen.

zur Lösung	zur Übersicht

[1] Der berühmte italienische Physiker Enrico Fermi stellte seinen Studenten immer wieder Probleme, die man ohne viel Nachschlagen in Büchern oder Formelsammlungen, nur durch vernünftige Annahmen und einem klaren physikalischen Sachverstand lösen konnte.

Warum ist mol überflüssig?

Bsp. C: 1 mol C hat die Masse 12 g

1 Atom " " " $12 \cdot 1\,u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg = 1{,}67 \cdot 10^{-24}\,g$

Wie viele Atome sind in 1 mol? $N = \frac{12\,g}{12 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-24}\,g} = 6 \cdot 10^{23}$

$m_M \approx 10\,g \qquad m_{M.-A.} \approx (40 + 12 + 3 \cdot 16)\,u \approx 100\,u \quad (CaCO_3)$

$\Rightarrow N = \frac{m_M}{m_{M.-A.}} \approx 10^{22}$ = Zahl der Muschelatome

---

Strand: $100\,m \cdot 50\,m \cdot 2\,m = 10000\,m^3$

4 Sandkörner pro $1\,mm^3 \;\hat{=}\; 0{,}25\,mm^3$

$\Rightarrow N = \frac{V_{Strand}}{V_{S.-K.}} = 4 \cdot 10^{13}$

Es gibt ca. 10^9 mal mehr Atome in einer Muschel als Sandkörner am Strand.

Wenn du mit einem Tesafilmstreifen eine Atomschicht des Tisches abhebst: Wie lange brauchst du, um an der Unterseite des Tisches anzukommen?

$$\left.\begin{array}{l}\text{Atomschicht: ca. } 10^{-9}\,\text{m} \\ \text{Tisch: ca. } 3\,\text{cm}\end{array}\right\} \Rightarrow N = \frac{0{,}03}{10^{-9}} = 3 \cdot 10^{7}$$

$$\Rightarrow T \approx 1 \cdot 10^{7} \approx 100\,d$$

(2 pro s)

pro Schicht $1\,\text{cm}^2$ Tesa: $\left(3 \cdot 10^{7}\,\text{cm}^2 = 3 \cdot 10^{3}\,\text{m}^2\right)$

$$3 \cdot 10^{7}\,\text{cm} = 3 \cdot 10^{5}\,\text{m} \mathrel{\hat{=}} 30000 \text{ Rollen}$$

Bei $0{,}1$ € pro Rolle: mind. 3000 €

Materialkosten

+ Personalkosten

Zerfallsgleichungen

$^{A}_{Z}X$ X = Elementsymbol, z. B. U, Fe, He, C, ...

A = Massenzahl = Anzahl Protonen + Neutronen

Z = Protonenzahl (= e^--Zahl) = Ordnungszahl
= Kernladungszahl

$^{A}_{Z}X$ Mutternuklid, $^{A\pm\ldots}_{Z\pm\ldots}Y$ Tochternuklid, Y^* angeregtes Tochternuklid

---

α-Zerfall: $^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}Y^* + {}^{4}_{2}He$ (= α) gefolgt von $Y^* \longrightarrow Y + \gamma$

β^--Zerfall: $^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z+1}Y + {}^{0}_{-1}e^-$ $(=\beta^-)$ $+ \bar{\nu}$, $\bar{\nu}$ = Anti-(Elektron-)Neutrino

[$n \to p + e^- + \bar{\nu}$]

β^+-Zerfall: $^{A}_{Z}X \longrightarrow {}^{A}_{Z-1}Y + {}^{0}_{+1}e^+$ $(=\beta^+)$ $+ \nu$, ν = (Elektron-)Neutrino

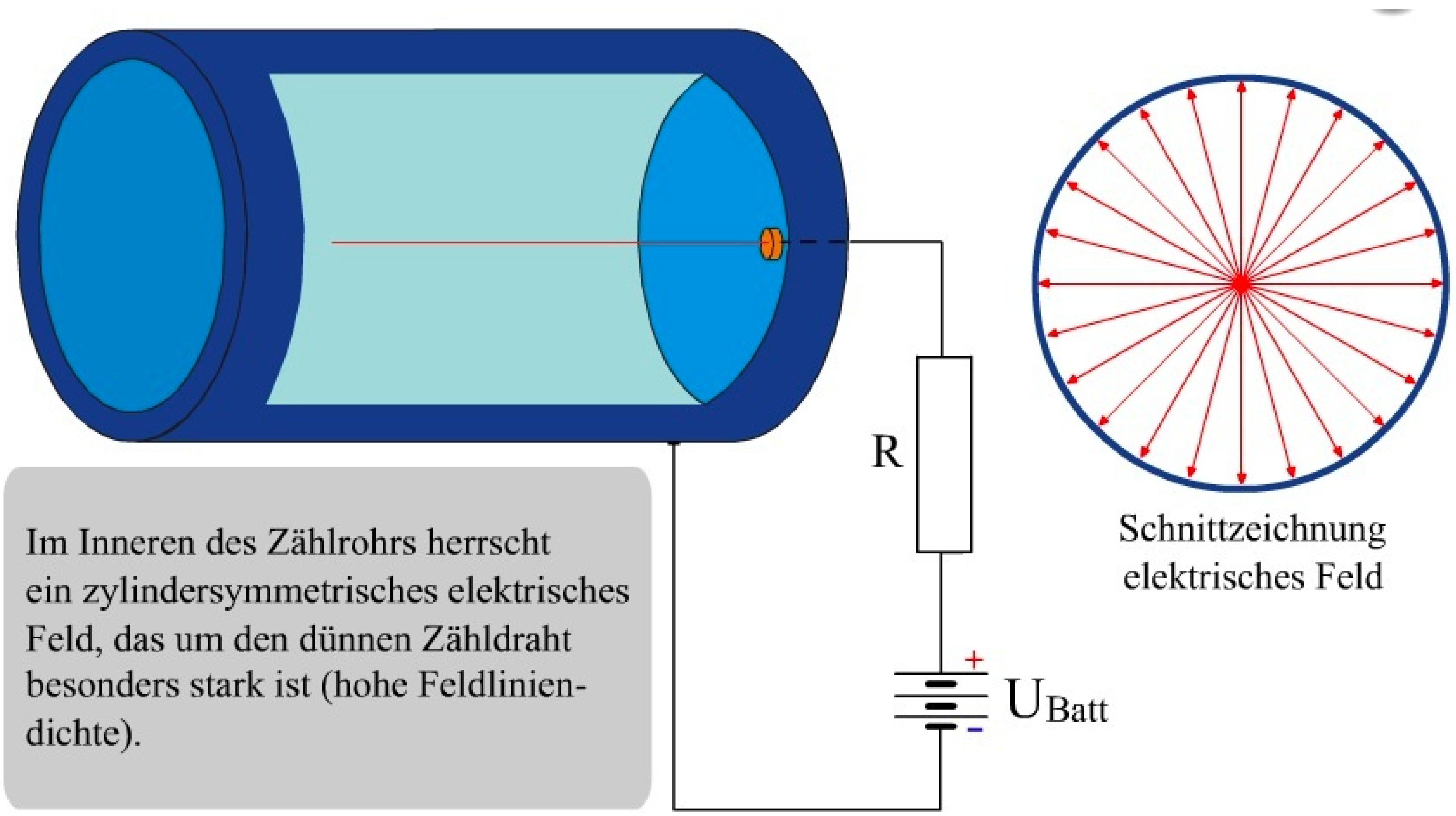
[$p \to n + e^+ + \nu$]

γ-Zerfall: $^{A}_{Z}X^* \longrightarrow {}^{A}_{Z}X + \gamma$

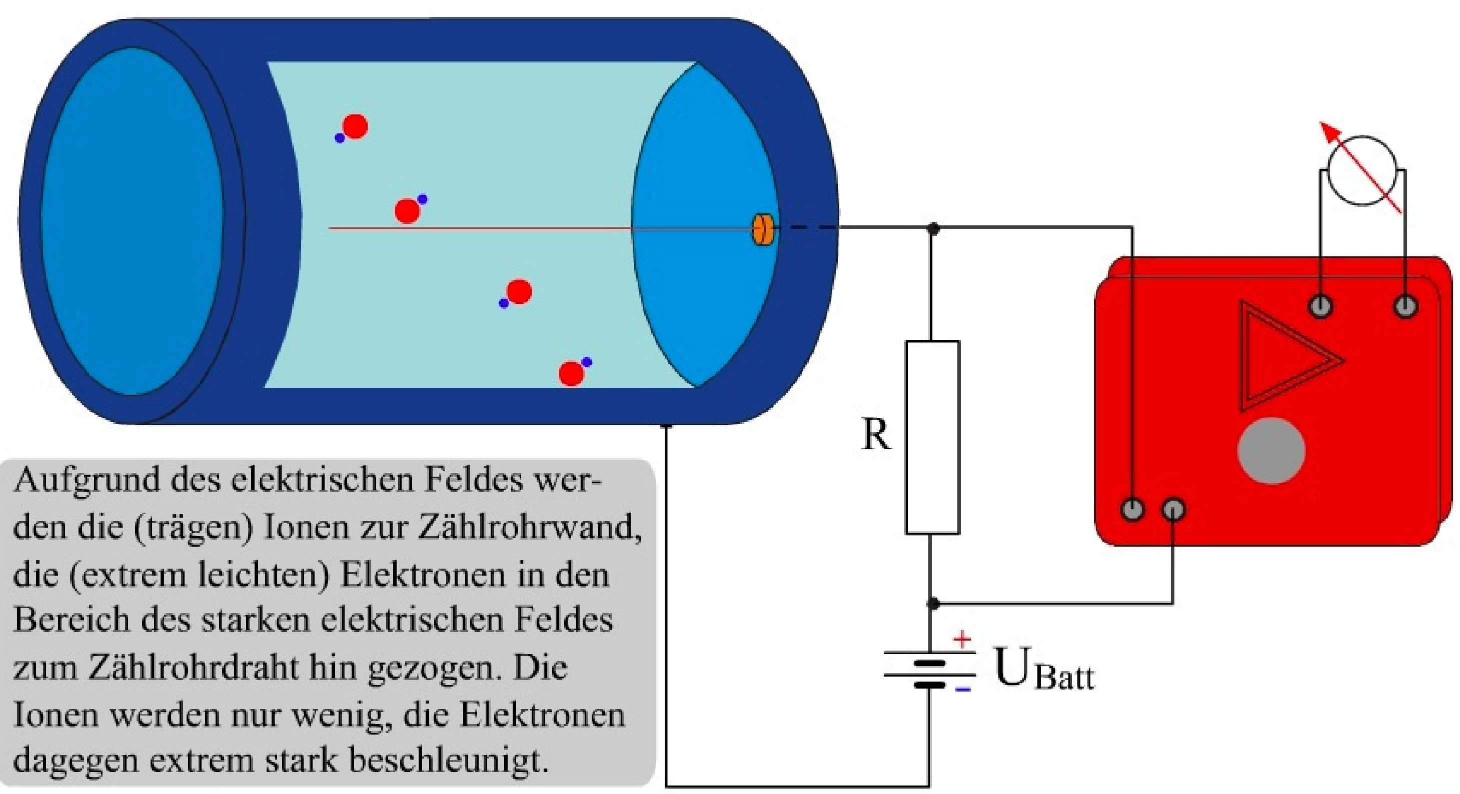
HA: vollst. wahrscheinlichste Zerfallsreihe von ^{235}U und ^{235}Pu mit Textverarb./Formeleditor

Detektoren für ionisierende Strahlung

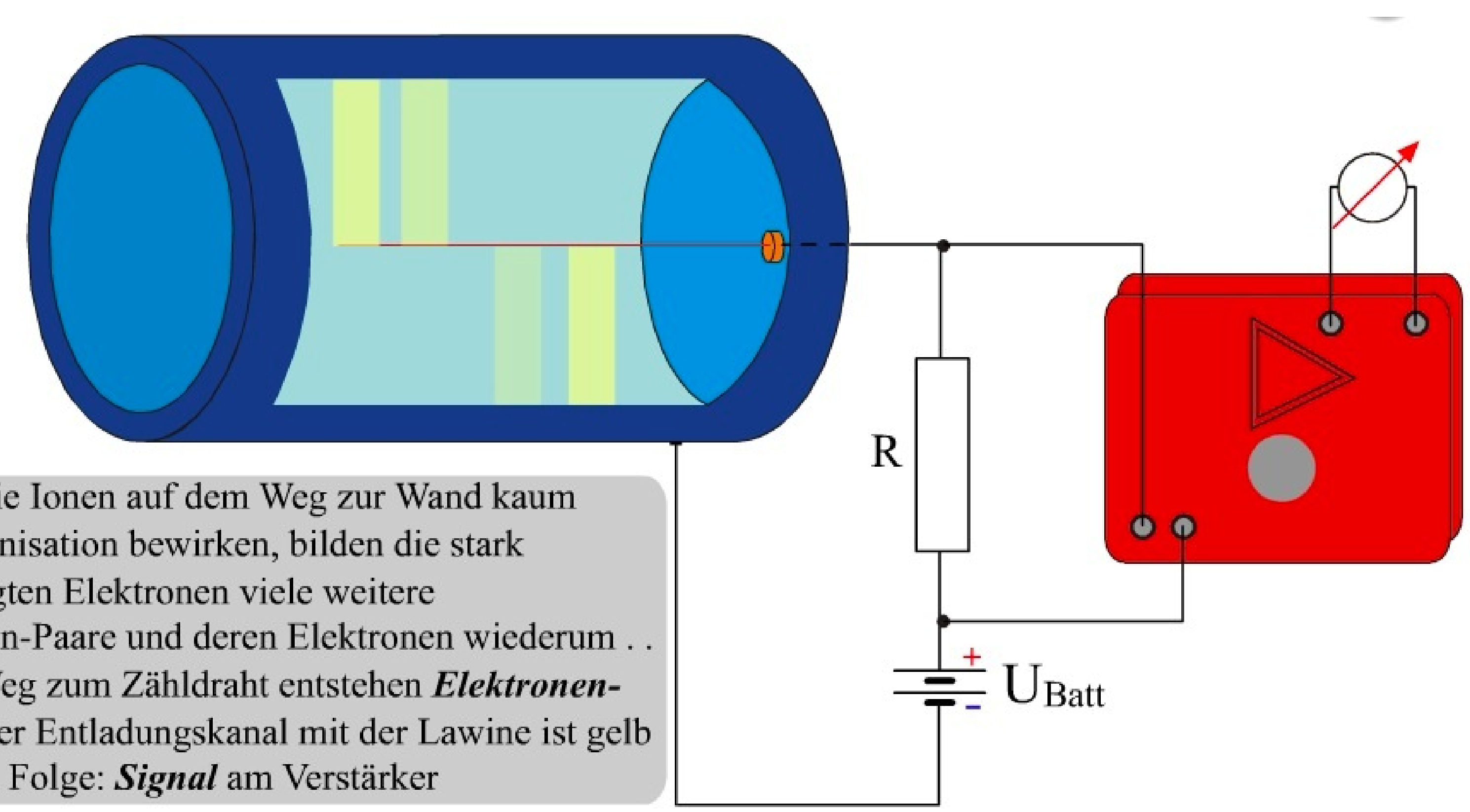
Geiger-Müller-Zählrohr



Im Inneren des Zählrohrs herrscht ein zylindersymmetrisches elektrisches Feld, das um den dünnen Zähldraht besonders stark ist (hohe Feldliniendichte).



Aufgrund des elektrischen Feldes werden die (trägen) Ionen zur Zählrohrwand, die (extrem leichten) Elektronen in den Bereich des starken elektrischen Feldes zum Zählrohrdraht hin gezogen. Die Ionen werden nur wenig, die Elektronen dagegen extrem stark beschleunigt.



Während die Ionen auf dem Weg zur Wand kaum Sekundärionisation bewirken, bilden die stark beschleunigten Elektronen viele weitere Elektron-Ion-Paare und deren Elektronen wiederum . . . Auf dem Weg zum Zähldraht entstehen ***Elektronenlawinen.*** Der Entladungskanal mit der Lawine ist gelb angedeutet. Folge: ***Signal*** am Verstärker

Zerfallsgesetz

theoretisch hergeleitet

$\Delta N = N_2 - N_1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Delta N}{\Delta t}$ ist die Zählrate, von der wir vermuten, dass sie proportional zu N ist

$$\Rightarrow \quad -\frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda \cdot N$$

(Minus, weil $\Delta N < 0$, N aber > 0)

$$\text{oder} \quad -\frac{dN}{dt} = \lambda \cdot N$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{dN}{N} = \lambda \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad -\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{N} = \lambda \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \quad -\ln N \Big|_{N_0}^{N} = \lambda \cdot t \Big|_0^t$$

$$\Rightarrow \quad -(\ln N - \ln N_0) = \lambda t$$

$$= \quad -\ln \frac{N}{N_0} = \lambda \cdot t \qquad \Big| \cdot (-1) \Big| \; e^{\text{hoch}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow \quad N = N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow A = -\frac{\Delta N}{\Delta t}$ ist die durchschnittl. Aktivität im Zeitintervall Δt

$\rightsquigarrow$ momentane Aktivität $A = -\frac{dN}{dt} = -\dot{N}(t) = -\underbrace{N_0\, e^{-\lambda t}}_{N(t)} \cdot (-\lambda)$

$$= \lambda \cdot N$$

$$= \ln 2 \, \frac{N}{T_{1/2}}$$

Zur Erinnerung: $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$

Aufgaben zum Zerfallsgesetz

2. Bestimmen Sie den Bruchteil einer Menge ^{226}Ra mit $t_H = 1600$ a, der nach 10 Jahren noch nicht zerfallen ist.
3. Berechnen Sie die Menge Blei, die seit Bestehen der Erde ($4{,}55 \cdot 10^9$ a) aus 1 kg ^{238}U mit $t_H = 4{,}5 \cdot 10^9$ a entstanden ist.
4. Aus der Messung der Masse und der Aktivität lässt sich die Halbwertszeit der sehr langlebigen Substanz ^{232}Th zu $t_H = 1{,}39 \cdot 10^{10}$ a bestimmen. Bestimmen Sie die Zahl der in einer Sekunde zerfallenden Kerne bei einer Thoriummasse von 1 g.
5. a) Berechnen Sie die Masse eines Americium241-Präparats mit einer Aktivität von 333 kBq.
   b) Bestimmen Sie die Aktivität von 2 µg ^{210}Po ($t_H = 138$ d).
6. Das radioaktive ^{40}K ist zu 0,0117 % in natürlichem Kalium vorhanden. Eine Probe KCl der Masse 3 g besitzt eine konstante Aktivität von 50 Bq. Berechnen Sie die zugehörige Halbwertszeit und deuten Sie das Ergebnis.
*7. Radon220 entsteht durch α-Zerfall aus Radium224 und zerfällt in Polonium216.
   a) Zeigen Sie an diesem Beispiel, dass in einer Zerfallsreihe mit den Kernen (1), (2) und (3) für die Anzahlen N_1, N_2 und N_3 die Beziehung $\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \lambda_3 N_3$ gilt.
   b) Bestimmen Sie unter Anwendung der oben angegebenen Formel, welche Radiummenge in einer alten Lagerstätte auf 1 g Uran238 entfällt ($t_{H,U238} = 4{,}5 \cdot 10^9$ a, $t_{H,Ra226} = 1600$ a).

2) $N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}$

$\lambda = \frac{\ln 2}{T_H} \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\ln 2 \frac{t}{T_H}} = 0{,}9957$
$= 99{,}57\%$

3) [Schätzung: ca die Hälfte, weil alle Halbw-t der Tochternuklide viel kleiner sind]

$U \rightarrow Pb$

$N_0 \rightarrow N + N_{Pb} = N_0 - N$

$\Rightarrow N_0 - N_0 \, e^{-\lambda t} = N_0 \left(1 - e^{-\lambda t}\right) = N_{Pb}$

$N_0 = \frac{1\,kg}{238 \; 1{,}67 \; 10^{-27}\,kg} = 2{,}52 \; 10^{24}$

$\Rightarrow N_{Pb} = N_0 \cdot \left(1 - e^{-\ln 2 \frac{4{,}55}{4{,}5}}\right) = 1{,}27 \cdot 10^{24}$

$m_{Pb} = 206 \; 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg \cdot 1{,}27 \cdot 10^{24} = 438\,g$

[$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t} \Rightarrow m_U \Rightarrow m_{Pb} = 1kg - m_U$
$= 503\,g$
falsch]

4) $T_H = 1{,}39 \; 10^{10}\,a$, ^{232}Th, ges.: A
$= 4{,}38 \; 10^{17}\,s$

$N = \frac{10^{-3}\,kg}{232 \cdot 1{,}67 \; 10^{-27}\,kg}$

$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_H} N = 4081\,Bq \approx 4\,kBq$

5. a) Berechnen Sie die Masse eines Americium241-Präparats mit einer Aktivität von 333 kBq.
b) Bestimmen Sie die Aktivität von 2 µg ^{210}Po ($t_H = 138$ d).

a) $T_H = 432{,}2\,a$

$A = \lambda N \Leftrightarrow N = \frac{A}{\lambda} = \frac{A}{\ln 2} \cdot T_H = 6{,}55 \cdot 10^{15}$

$m_{Am} = N \; 241 \; 1{,}67 \; 10^{-27}\,kg = 2{,}64\,\mu g$

b) $A = \lambda N \quad , \quad \lambda = \frac{\ln 2}{138 \cdot 86400\,s} \quad , \quad N = \frac{2 \cdot 10^{-9}\,kg}{210 \; 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,kg}$

$A = 3{,}32 \cdot 10^{8}\,Bq = 332\,MBq$

a) $3 \cdot T_H \approx 600\,s$

$\Rightarrow T_H \approx 200\,s$

b) $\dot{N} \sim N \;, \; A \sim \dot{N}$

Z ist Bruchteil von A

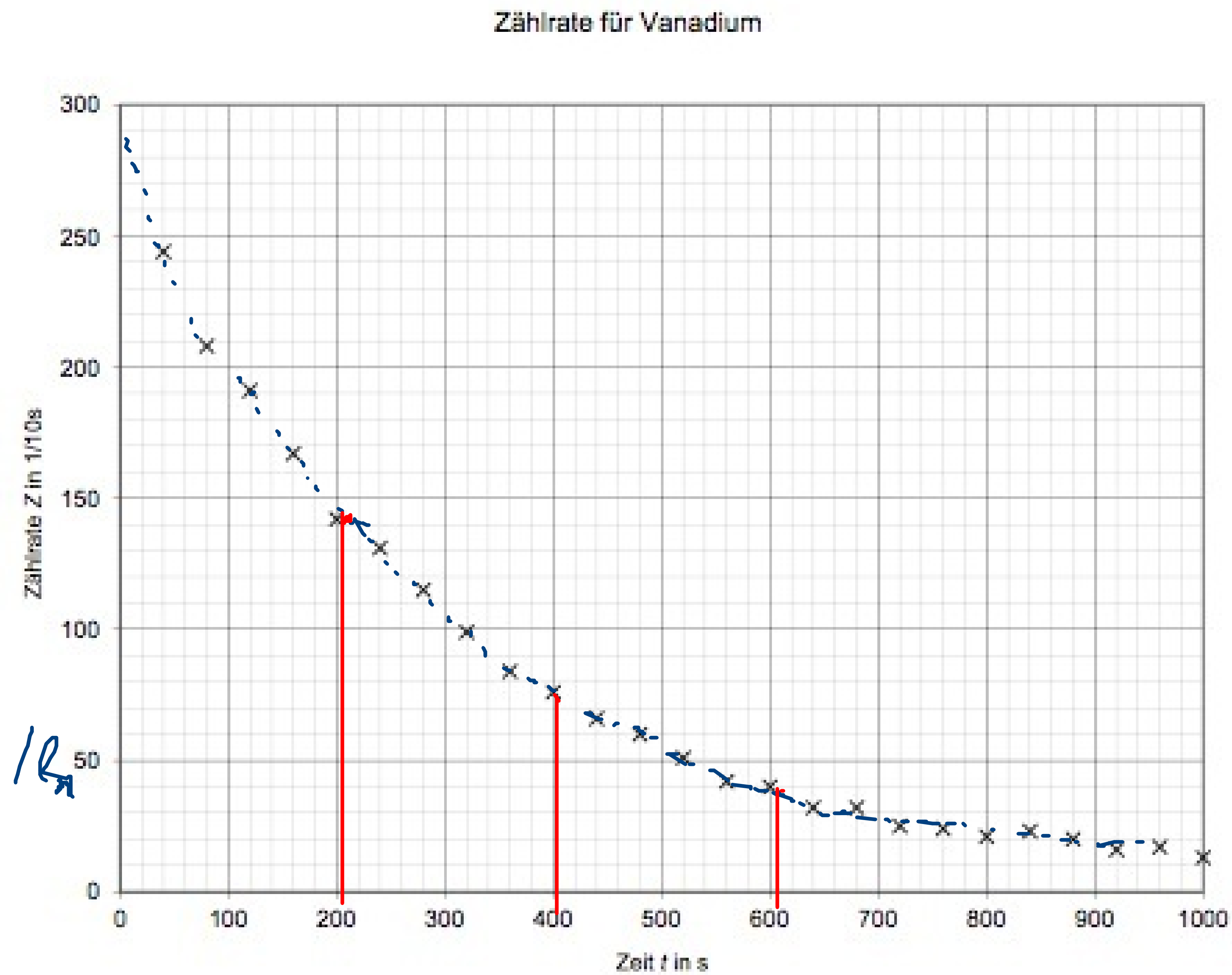
$\Rightarrow T_H$ von Z $= T_H$ von A

c) nach T_H $\quad N(T_H) = \frac{N_0}{2}$

$\Rightarrow N = N_0 e^{-\lambda t} \longrightarrow \frac{N_0/2}{N_0} = e^{-\lambda T_H} \quad | \ln$

$\Rightarrow \underbrace{\ln 1}_{=0} - \ln 2 = -\lambda T_H$

$\Rightarrow \ln 2 = \lambda T_H \Leftrightarrow T_H = \frac{\ln 2}{\lambda}$



d) Zerfallskonstante, keine anschauliche physikal. Bedeutung, $\lambda = \frac{\ln 2}{T_H} \approx 3 \cdot 10^{-3}\,/s$

Abi 2013

e) $N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t} \quad | \ln$

$\Leftrightarrow \underbrace{\ln N}_{\hat{=}\, y} \approx \underbrace{\ln N_0}_{\substack{y\text{-Abschn} \\ \hat{=}\, b}} + (-\lambda)\cdot t = \ln N_0 - \lambda \underbrace{t}_{\hat{=}\, x}$

$\hat{=}\, m$ in $y = mx + b$

fallende Gerade

Begründ f Streuung: radioakt Zerfall ist ein Zufallsprozess

3.) a)

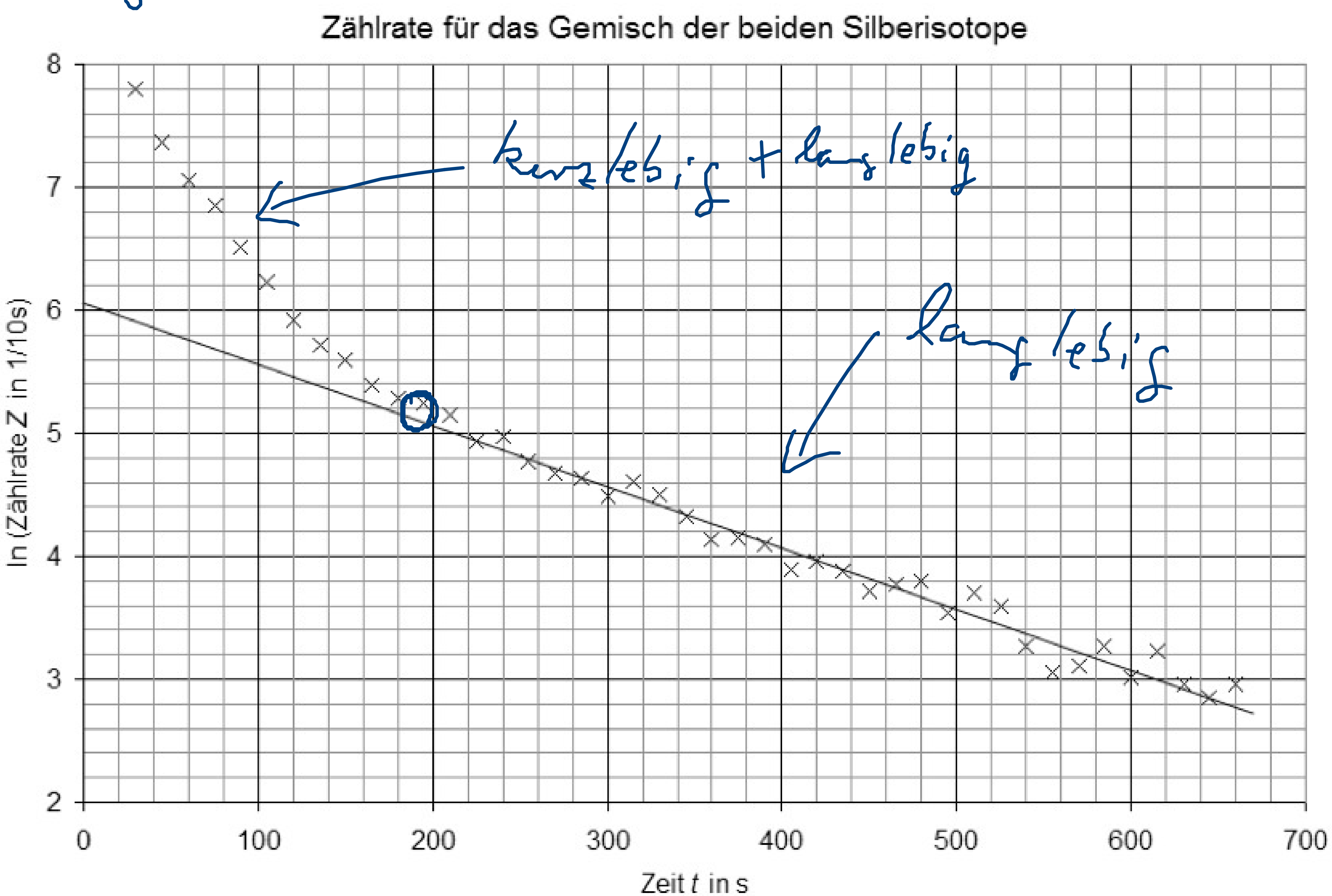
b) $\lambda_{kurz} \approx 0{,}02/s$

$\Rightarrow T_{H,kurz} \approx 30\,s$

$\Rightarrow 3\tfrac{1}{2}\,min = 210\,s$

$\approx 7 \cdot T_{H,kurz}$

Nur noch $\frac{N_0}{128}$ da.



c) Abb 3 · $\ln Z$

$\Rightarrow Z = e^{\ln Z}$

$\Rightarrow Z(60\,s) = e^{7{,}05}$

$= 1153$

$\Rightarrow Z(135\,s) = 298$

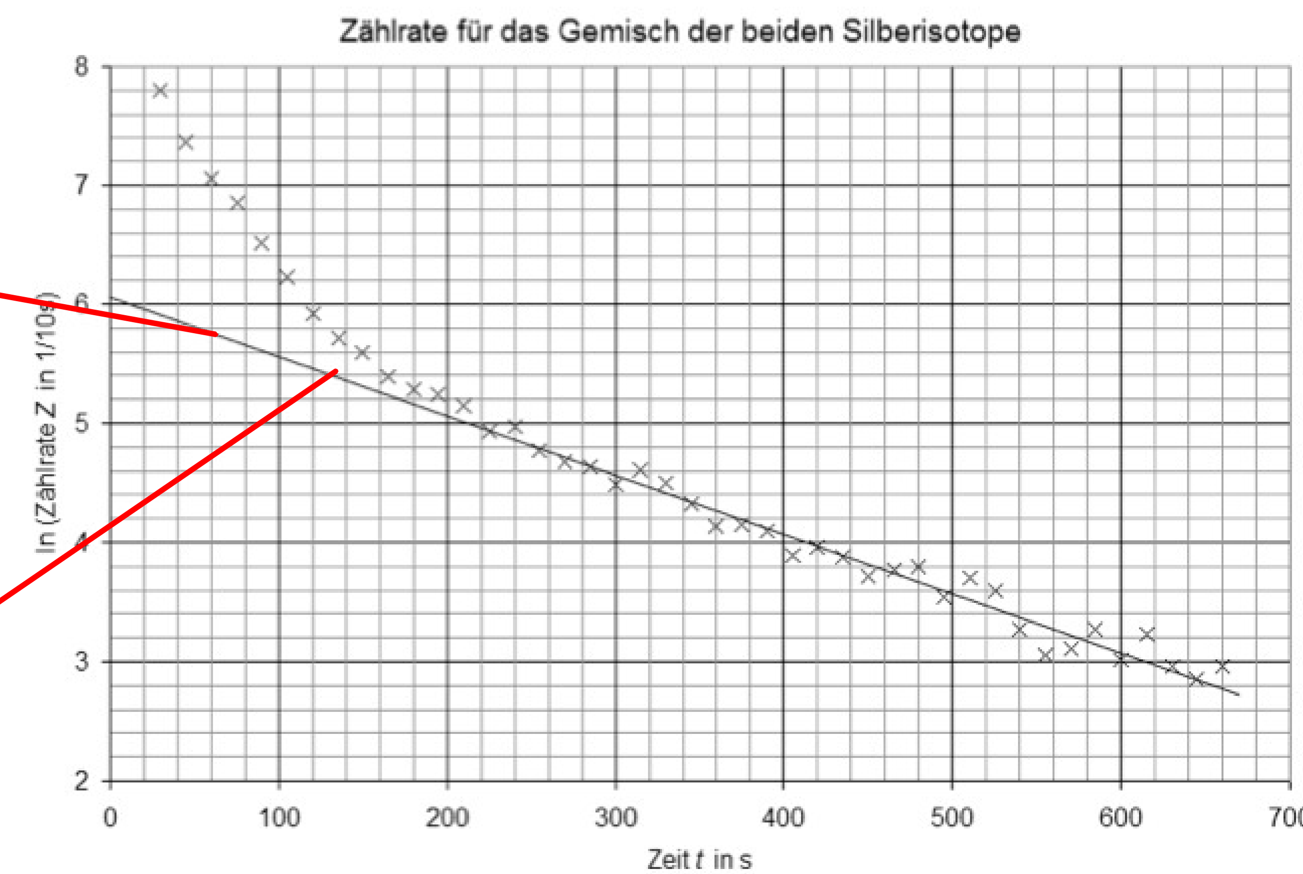
Gerade: langlebiges

$\Rightarrow Z_{lang}(60\,s) = e^{5{,}75} = 314$

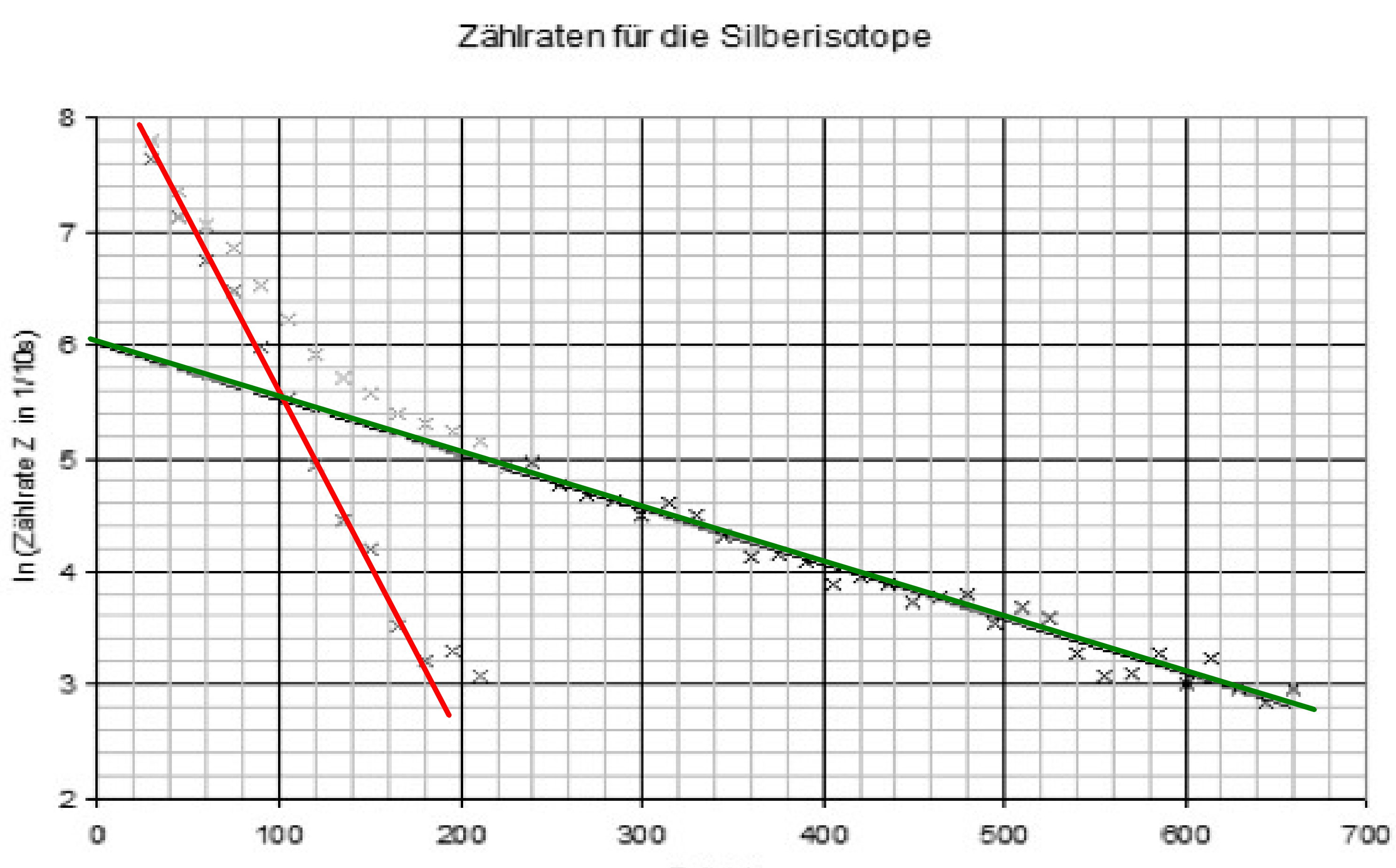
$Z_{lang}(135\,s) = e^{5{,}4} = 221$

Tabelle: Zählraten in Abhängigkeit von der Zeit

Zeit in s	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210
Gesamtzählrate in 1/10 s	2451	1576	1153	952	677	511	378	298	274	227	205	195	178
Zählrate für das langlebige Isotop in 1/10 s	361	336	314	290	269	250	232	221	201	186	173	161	150
Zählrate für das kurzlebige Isotop in 1/10 s	2090	1240	839	662	408	261	146	77	73	41	32	34	28



d)



e) $\lambda_k = 2{,}83 \cdot 10^{-2}/s \Rightarrow T_{H,K} = 24{,}5\,s$

$\lambda_l = 4{,}875 \cdot 10^{-3}/s \Rightarrow T_{H,l} = 142\,s$

4a. *Begründen Sie damit die Gültigkeit der Gleichung* $\dot{N}(t) = +\mu \cdot M - \lambda \cdot N(t)$ *für den gesamten Zeitraum der Bestrahlung.*

Der zeitlich konstanten Zunahmerate der aktivierten Atome $\dot{N}_{\text{Zunahme}}(t) = +\mu \cdot M$ wirkt die von ihrer Anzahl abhängige Abnahmerate $\dot{N}_{\text{Abnahme}}(t) = -\lambda \cdot N(t)$ infolge radioaktiven Zerfalls entgegen, was durch die benannte Differenz $\dot{N}(t) = +\mu \cdot M - \lambda \cdot N(t)$ ausgedrückt wird.

c) *Zeigen Sie, dass* $N(t) = \frac{\mu}{\lambda} \cdot M \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$ *eine Lösung der Differentialgleichung aus Aufgabenteil a) ist.*

$$\dot{N} = -\frac{\mu}{\lambda} M e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = M\mu \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\underline{M\mu e^{-\lambda t}} = \mu M - \lambda \frac{\mu}{\lambda} \cdot M\left(1 - e^{-\lambda t}\right) = \cancel{\mu M - \mu \cdot M} + \underline{\mu M e^{-\lambda t}}$$