Sei λ_E die von einem Empfänger beobachtete Wellenlänge, λ_S die Wellenlänge des ausgesandten Lichtes; Lichtquelle und Empfänger entfernen sich voneinander mit der Relativgeschwindigkeit v. Zeigen Sie, dass

gilt: $\dfrac{\lambda_E}{\lambda_S} = \sqrt{\dfrac{1+v/c}{1-v/c}} = 1+\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda_S}$ $\quad$ *mit* $\Delta\lambda = \lambda_E - \lambda_S$

(Tipp: Betrachten Sie den zeitlichen Abstand T_S zweier ausgesandter Wellenberge (= Schwingungsdauer im System des Senders). Bestimmen Sie zunächst die Zeitdauer, die ein Empfänger für diesen Vorgang misst und beachten Sie zudem, dass der Sender in dieser Zeit eine Wegstrecke zurücklegt, für deren Durchlaufen das Licht eine zusätzliche Zeit benötigt. So erhalten Sie T_E, d.h. die Schwingungsdauer, die ein Empfänger beobachtet. Über die bekannten Zusammenhänge zwischen Schwingungsdauer, Frequenz und Wellenlänge einer Welle gelangen Sie zu obiger Beziehung.)

$$T_E' = \frac{T_S}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$T_E = T_E' + \Delta t$$

$$= \frac{T_S}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v}{c}\cdot\frac{T_S}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= T_S \cdot \frac{\left(1+\frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= T_S \frac{\sqrt{1+v/c}^{\,2}}{\sqrt{1-v/c}\,\sqrt{1+v/c}} = T_S\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

$\overleftrightarrow{\Delta s}$ $\quad \overrightarrow{v}$

Δs im T_E'

[im S: $\Delta s = v\cdot T_S$]

im E: $\Delta s = v\cdot T_E'$

Für diese zusätzl. Strecke braucht zusätzl. Zeit: $c = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta t = \dfrac{\Delta s}{c}$

In der Astrophysik gibt man üblicherweise die Doppler-Verschiebung als den Quotienten $z=\frac{\Delta\lambda}{\lambda_s}$ an.

2.2. Leiten Sie eine Formel her, in der die Fluchtgeschwindigkeit v nur in Abhängigkeit von z und c ausgedrückt ist.

2.3. Trägt man die aus der Doppler-Verschiebung ermittelte Fluchtgeschwindigkeit ferner Galaxien gegen deren Entfernung auf, erhält man nebenstehendes Diagramm.

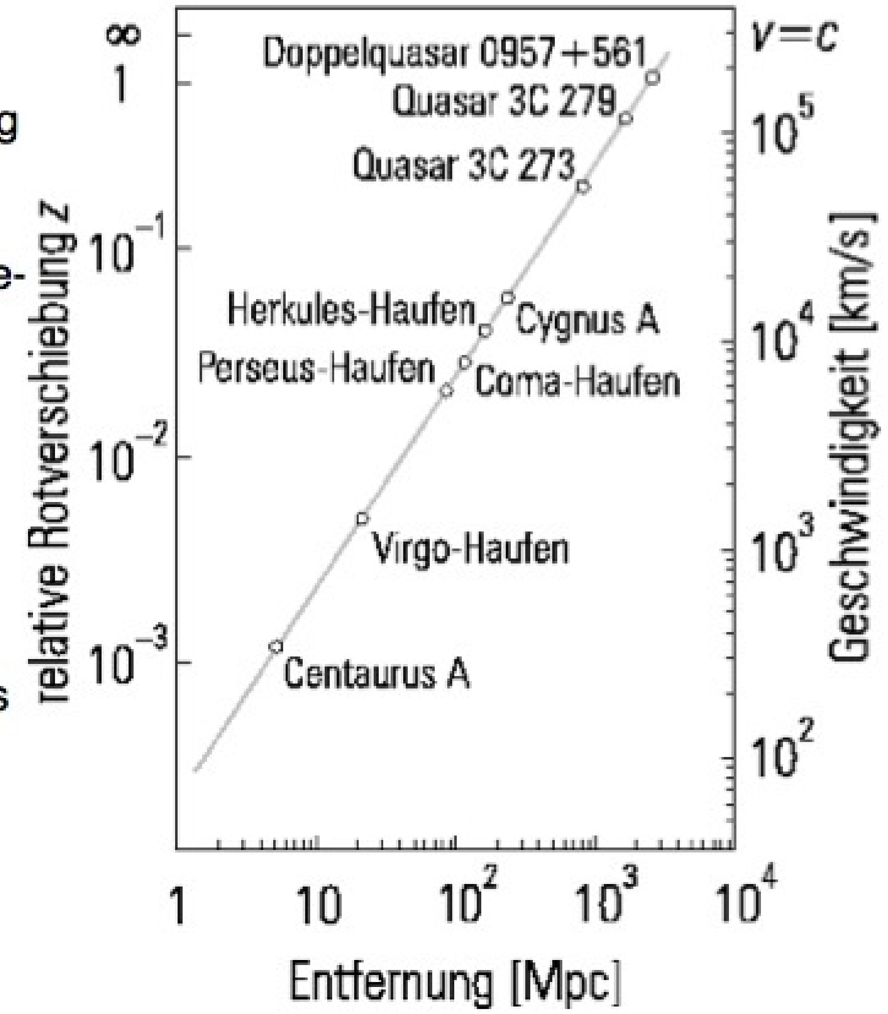
a) Ermitteln Sie daraus die Proportionalitätskonstante, die man auch *Hubble-Konstante* nennt, und formulieren Sie das Hubble-Gesetz, was den Zusammenhang zwischen Fluchtgeschwindigkeit und Entfernung der Galaxien mathematisch beschreibt.

b) Welche Fluchtgeschwindigkeit besitzt eine Galaxie von der Erde aus betrachtet, die eine Rotverschiebung von z=1,4 aufweist?

c) Wie weit ist die Galaxie aus b) entfernt?

d) Zeigen Sie, dass sich mit der Hubble-Konstanten das Alter des Universums ergibt und berechnen Sie dieses.

(Tipps: Einheitenbetrachtung im Hubble-Gesetz; Nachdenken ;-)



2.2. $\frac{\sqrt{1+\frac{v}{c}}}{\sqrt{1-\frac{v}{c}}} = 1+z$

$\Rightarrow \left(1+\frac{v}{c}\right) = \left(1-\frac{v}{c}\right)(1+z)^2$

$= (1+z)^2 - \frac{v}{c}(1+z)^2$

$\Leftrightarrow \frac{v}{c} + \frac{v}{c}(1+z)^2 = (1+z)^2 - 1$

$\Leftrightarrow \frac{v}{c}\left(1+(1+z)^2\right) = (1+z)^2 - 1$

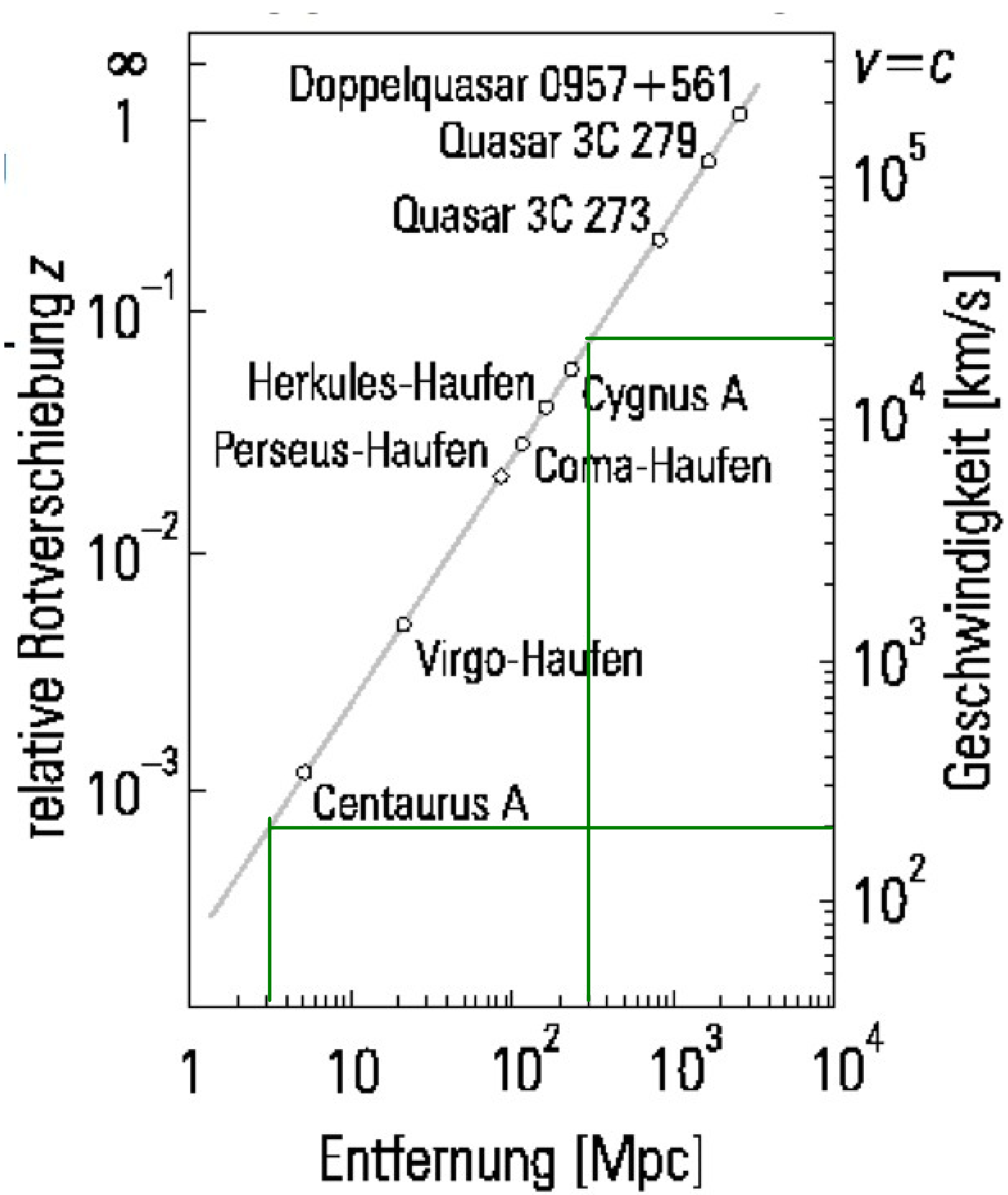
$\Leftrightarrow \frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}$

$\Rightarrow$ 2.3. b) $\frac{v}{c} = \frac{(1+1,4)^2-1}{(1+1,4)^2+1} = 0,7 \Rightarrow v = 2,11 \cdot 10^5\ km/s$

c) $r = \frac{v}{H}$

2.3. a)

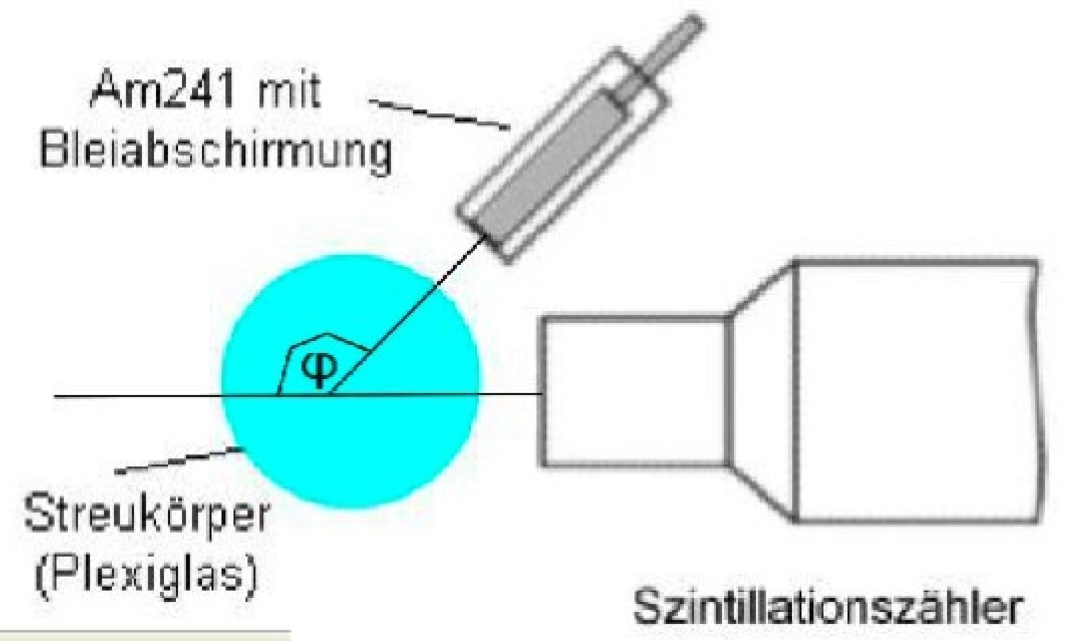
2 Mpc / 200 km/s

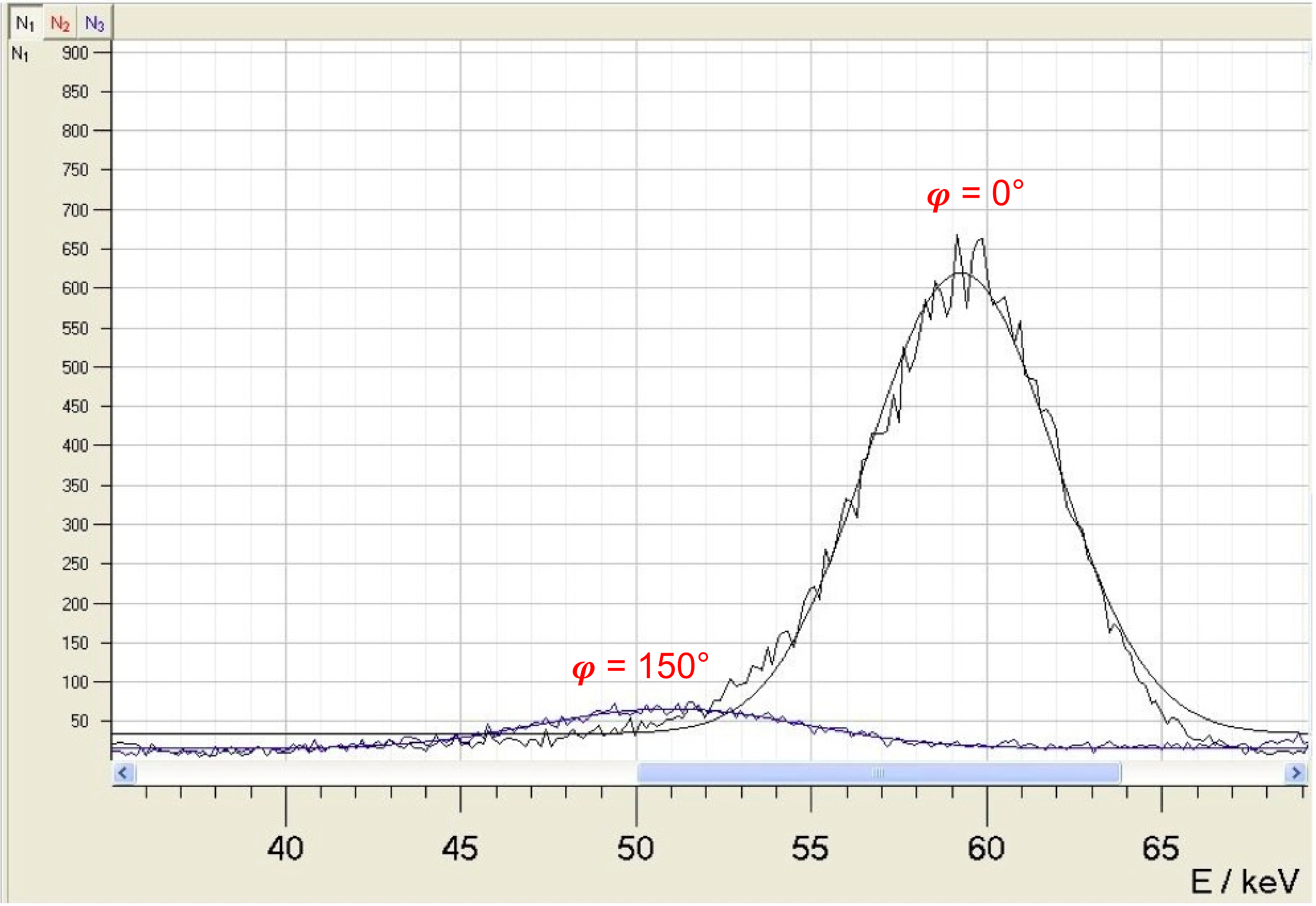


300 Mpc / 20000 km/s

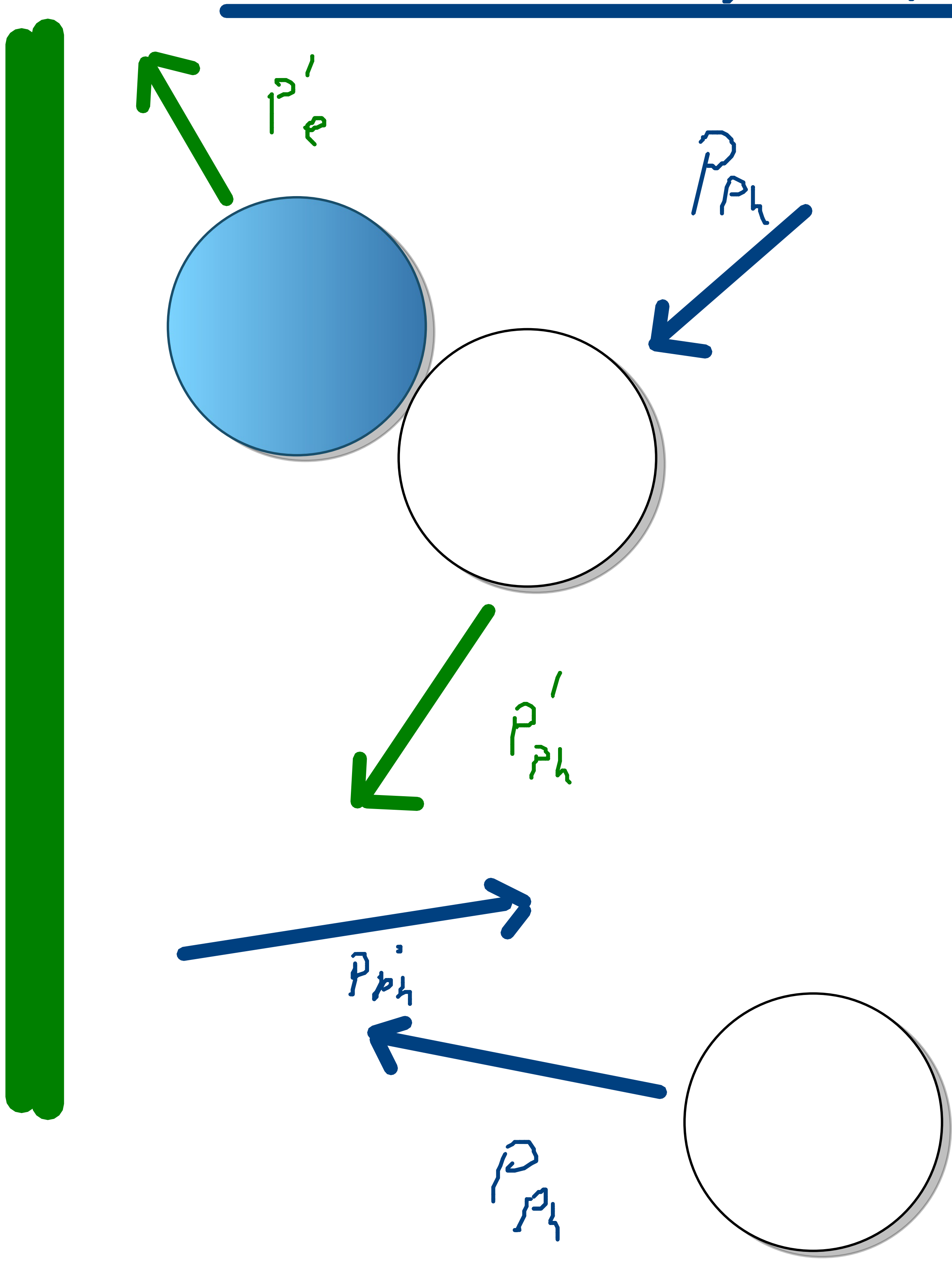
$$H = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{19800}{298} \frac{km}{s \cdot Mpc} = 66 \frac{km}{s \cdot Mpc} \Rightarrow v = H \cdot r$$

Erläutere das Diagramm physikalisch:
Was ist dargestellt?
Welche physikalischen Schlussfolgerungen lassen sich ziehen?
Was geschieht mit der γ-Strahlung im Streukörper?
Lässt sich das durch bekannte Prozesse verdeutlichen?

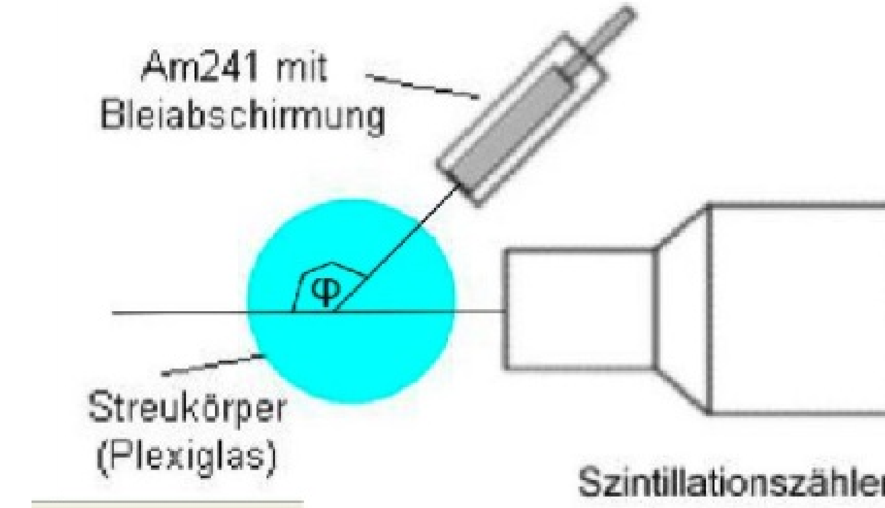


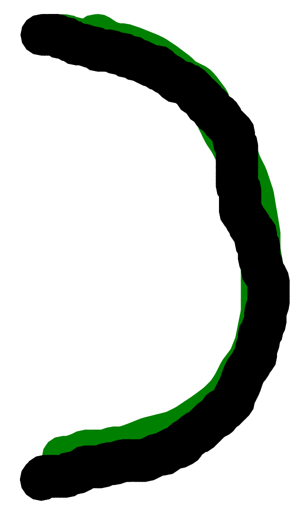


Hypothese: Elastischer Stoß mit e^-



$p_{Ph}' < p_{Ph}$





Detektor

Bei Stoß mit „Bande": $p_{Ph} = p_{Ph}'$
(≙ Atomkern
schwer, unbeweglich)

Energie des Photons : $E_{Ph} = h \cdot f$

Impuls " " : $p_{Ph} = \frac{h}{\lambda}$

$= mc^2$

$\Rightarrow$ „Masse" des Photons : $m = \frac{h \cdot f}{c^2}$

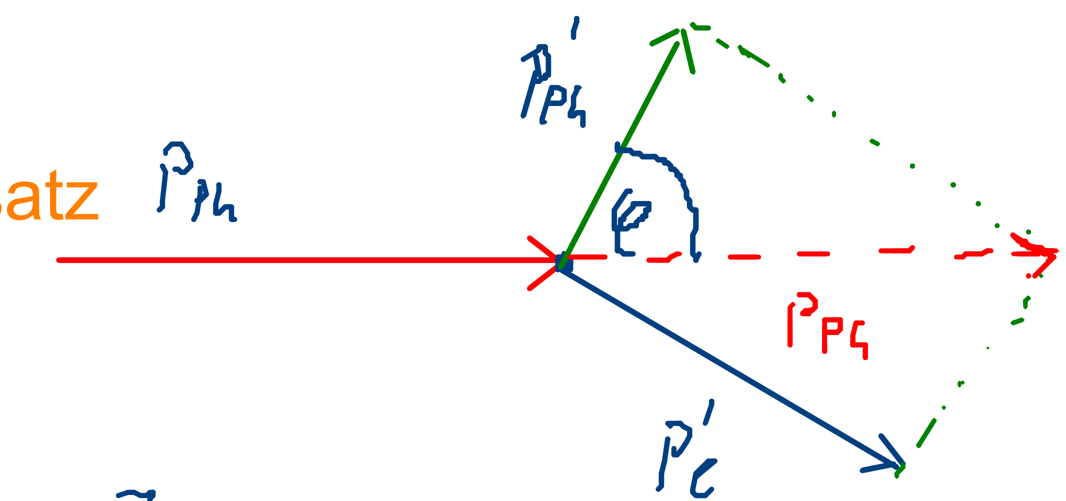
$\left(c = \lambda \cdot f \Leftrightarrow f = \frac{c}{\lambda} \right) \quad = \frac{h \cdot c}{\lambda \cdot c^2} = \frac{h}{\lambda c}$

$\Rightarrow$ Impuls des Photons : $p = m \cdot c = \frac{h}{\lambda}$

$\vec{p}_{Ph} = \vec{p}_e\,' + \vec{p}_{Ph}\,'$ Impulssatz

$p_e'^2 = p_{Ph}^2 + p_{Ph}'^2 - 2\, p_{Ph}\, p_{Ph}' \cdot \cos\varphi$

$hf + m_{0e} c^2 = h \cdot f' + E_e'$ Energiesatz



$E_e' = m c^2 = \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4}$

$hf - hf' + m_{0e} c^2 = \sqrt{p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4} \quad \left[E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 \right]$

$\Rightarrow \left(hf - hf' + m_{0e} c^2 \right)^2 = p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4$

Kosinussatz

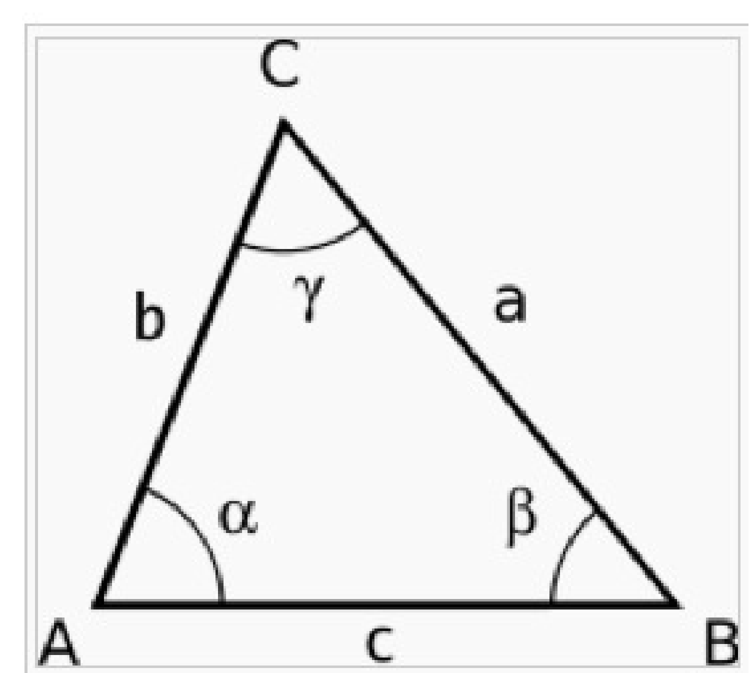
("Pythagoras für nicht-rechtwinklige Dreiecke")

Für die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sowie für den der Seite c gegenüberliegenden Winkel (d. h. den zwischen den Seiten a und b liegenden Winkel) γ gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$$

Entsprechend gilt für die anderen Winkel:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,\cos\beta$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\alpha$$



[redacted]

$$(hf - hf' + m_{0e}c^2)^2 = p_e'^2 c^2 + m_{0e}^2 c^4 \qquad p_e'^2 = p_{Ph}^2 + p_{Ph}'^2 - 2\, p_{Ph}\, p_{Ph}' \cdot \cos\varphi$$

$$h^2f^2 + h^2f'^2 + \cancel{m_{0e}^2 c^4} - 2h^2ff' + \underbrace{2hf\, m_{0e}c^2 - 2hf'\, m_{0e}c^2} = p_e'^2 c^2 + \cancel{m_{0e}^2 c^4}$$

$$\Leftrightarrow h^2f^2 + h^2f'^2 + 2\cdot h\, m_{0e}c^2 (f - f') - 2h^2ff' = \left(p_{Ph}^2 + p_{Ph}'^2 - 2p_{Ph}\, p_{Ph}' \cos\varphi\right)\cdot c^2$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{h^2c^2}{\lambda^2}} + \cancel{\frac{h^2c^2}{\lambda'^2}} + \underline{2h\, m_{0e}c^2\left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'}\right)} - \underline{\frac{2h^2c^2}{\lambda\lambda'}} = \cancel{\frac{h^2c^2}{\lambda^2}} + \cancel{\frac{h^2c^2}{\lambda'^2}} - \underline{2\,\frac{h^2c^2}{\lambda\lambda'}\cos\varphi}$$

$$2h\, m_{0e}c^3\left(\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'}\right)$$

Für beliebige Winkel gilt

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{0e}c}(1 - \cos\varphi).$$