PhLk_Abi2014

Doppler-Effekt

zunächst klassisch, z.B. Schallwellen

v_{Ph} = Ausbr. - Geschw. d. Welle (häufig c), Bsp. Schall: $v_{Ph} \approx 340\ m/s$

f = Frequenz (ursprünglich)

f_E = Fr., die der Empfänger registriert

Bewegter Empfänger, ruhender Sender:
Wellenberge bewegen sich schneller bzw. langsamer auf den Empfänger zu, der sich mit u dem Sender nähert bzw. von ihm entfernt.

$$f_E = \frac{v_{Ph} \pm u}{\lambda} = \frac{v_{Ph} \pm u}{v_{Ph}/f} = \frac{v_{Ph} \pm u}{v_{Ph}} \cdot f$$

$$= f \cdot \left(1 \pm \frac{u}{v_{Ph}}\right)$$

+ bei Annäherung
− bei Entfernung

$$v_{Ph} = c = \lambda \cdot f$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{v_{Ph}}{f}$$

Bewegter Sender, ruhender Empfänger:
Innerhalb der Zeit zwischen dem Aussenden zweier Wellenberge (= Periodendauer T) bewegt sich der Sender ein Stück weiter:

$$\Delta s = u \cdot T = u/f$$

$$\Rightarrow \lambda_E = \lambda \mp \Delta s = \lambda \mp \frac{u}{f} = \lambda \mp \frac{u}{v_{Ph}/\lambda} = \lambda \mp \frac{\lambda \cdot u}{v_{Ph}}$$

$$= \lambda \cdot \left(1 \mp \frac{u}{v_{Ph}}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_E = \frac{v_{Ph}}{f_E} = \frac{v_{Ph}}{f} \cdot \left(1 \mp \frac{u}{v_{Ph}}\right)$$

$(: v_{Ph} \,|\, \text{KW})$

$$\Leftrightarrow f_E = \frac{f}{1 \mp \frac{u}{v_{Ph}}}$$

− bei Annäherung
+ bei Entfernung

$$f = \frac{1}{T} \Leftrightarrow T = \frac{1}{f}$$

$$\lambda = \frac{v_{Ph}}{f} \Leftrightarrow f = \frac{v_{Ph}}{\lambda}$$

$$\lambda_E \cdot f_E = v_{Ph} \Leftrightarrow \lambda_E = \frac{v_{Ph}}{f_E}$$

Doppler-Effekt bei elektromagnetischen Wellen (also relativistisch)

Es muss nicht mehr unterschieden werden zw. Bew. des Empfängers und Bew. des Senders.

Sender bewegt sich weg:
Empfänger misst alle den Sender betreffenden Zeiten gedehnt, also auch T.

$$T_E = T = T_S \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \iff \frac{1}{f_E} = \frac{1}{f_S} \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\iff f_E = f_S \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

v = Geschw. des Senders

$c = v_{Ph}$ = Ausbr.

$T_E = \frac{1}{f_E}$, $T_S = \frac{1}{f_S}$

Das ist die Frequenz, die der Empfänger "ausgesandt sieht", dazu kommt noch der Dopplereffekt, sodass er insgesamt folgende Frequenz misst:

$$f_E = f_S \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{1}{1+\frac{v}{c}} = f_S \frac{\sqrt{(1+\frac{v}{c})(1-\frac{v}{c})}}{1+\frac{v}{c}} = f_S \frac{\sqrt{(1+\frac{v}{c})(1-\frac{v}{c})}}{\sqrt{1+\frac{v}{c}}^{\,2}}$$

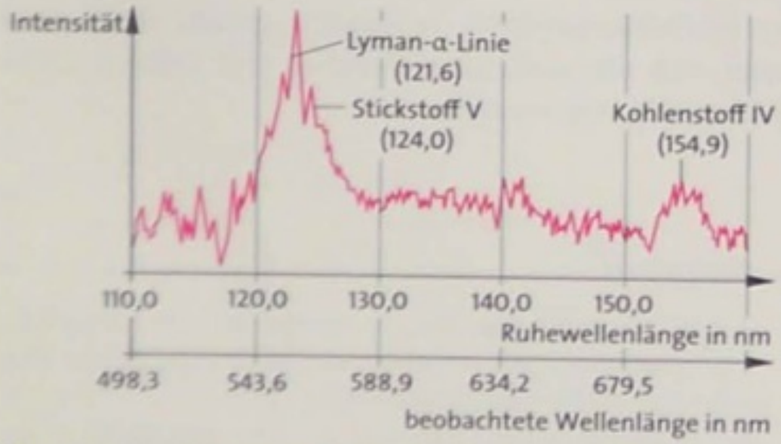
$$= f_S \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$$

Der bewegte Empfänger misst kürzere Zeiten, also größere Frequenzen. Ähnliches Herumrechnen ergibt die gleiche Formel.
Bei Annäherung wird v negativ gezählt!

$$\boxed{f_E = f_S \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}}$$

Anwendung des relativistischen Dopplereffektes: Geschwindigkeitsbestimmung kosmischer Objekte

(Entfernungsbestimmung mit Hilfe des Hubble-Gesetzes)



364.1 Das Spektrum des Quasars OQ172 stellt eine der höchsten Rotverschiebungen dar, die bisher beobachtet wurden. Die Lyman-α-Linie des Wasserstoffs ist von 121,6 nm im Ultravioletten bis zu einer grünen Wellenlänge von 550,8 nm verschoben.

Die Ruhewellenlänge der Lyman-α-Linie des Wasserstoffs beträgt $\lambda = 121{,}6$ nm. Lesen Sie aus **Abb. 364.1** die im Spektrum des Quasars OQ172 beobachtete Wellenlänge λ_E der gleichen Linie ab. Lösen Sie die Formel für den Doppler-Effekt nach v/c auf und setzen Sie mit $f = c/\lambda$ die Messwerte ein. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich der Quasar OQ172 von der Milchstraße entfernt.

1. λ_{beob} bestimmen im Diagramm

$\lambda_E = 551$ nm

2. Formel f. Dopplerversch. nach v auflösen

3. f ersetzen durch $\frac{c}{\lambda}$ (und $f_E = \frac{c}{\lambda_E}$)

4. v ausrechnen

2.) $f_E = f \cdot \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \quad | \, x^2 \, | : f$

$\Leftrightarrow \frac{f_E^2}{f^2} = \frac{1 - v/c}{1 + v/c} \Leftrightarrow \left(1 + \frac{v}{c}\right) \frac{f_E^2}{f^2} = 1 - v/c \Leftrightarrow \left(1 + \frac{f_E^2}{f^2}\right) \frac{v}{c} = 1 - \frac{f_E^2}{f^2}$

$\Leftrightarrow \frac{v}{c} = \frac{1 - f_E^2/f^2}{1 + f_E^2/f^2}$

$$\frac{v}{c} = \frac{f^2 - f_E^2}{f^2 + f_E^2}$$

$$= \frac{\frac{f^2}{f^2} - \frac{f_E^2}{f^2}}{\frac{f^2}{f^2} + \frac{f_E^2}{f^2}} = \frac{\frac{f^2 - f_E^2}{f^2}}{\frac{f^2 + f_E^2}{f^2}} = \frac{f^2 - f_E^2}{f^2} \cdot \frac{f^2}{f^2 + f_E^2}$$

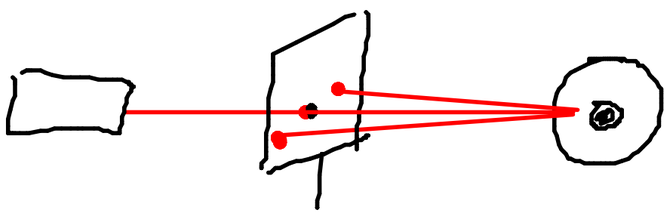
3.) $\frac{v}{c} = \frac{(c/\lambda)^2 - (c/\lambda_E)^2}{(c/\lambda)^2 + (c/\lambda_E)^2} = \frac{\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_E^2}}{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda_E^2}} = 0{,}907 \Rightarrow v = 2{,}72 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

(4.)

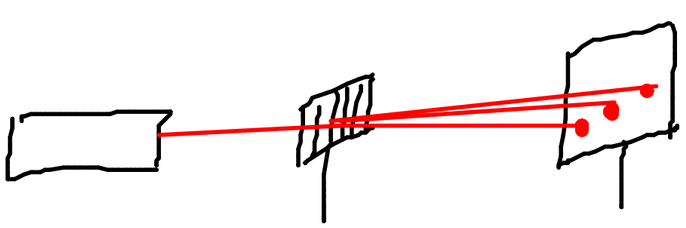
5.) Entfernungsbest.: Hubble-Gesetz $v = H \cdot r$ mit $H = 72 \frac{km}{s \cdot Mpc}$

$\Rightarrow r = \frac{v}{H} = \frac{2{,}72 \cdot 10^5}{72} Mpc = 3778 \, Mpc$

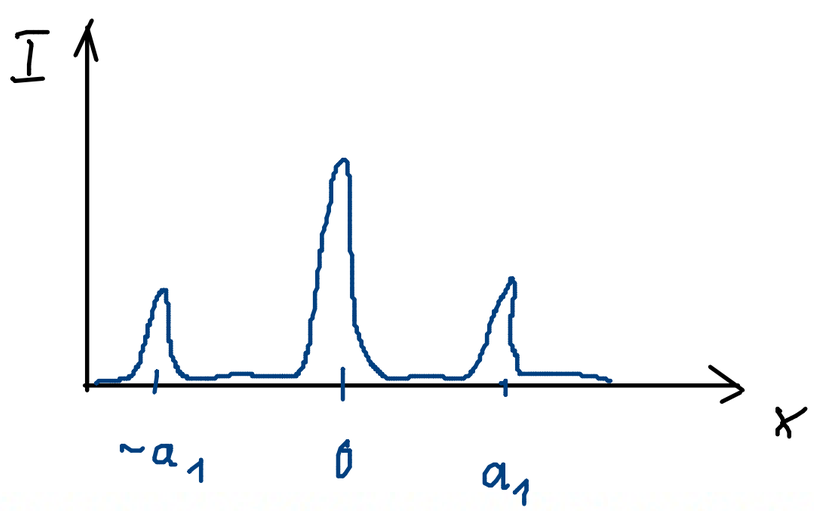
1.1. Beschreiben Sie das vorgeführte Experiment und stellen Sie die Intensitätsverteilung auf dem Schirm in einer Zeichnung dar. Skizzieren Sie kurz ein Ihnen bekanntes Experiment, das ein entsprechendes Interferenzbild zeigt.



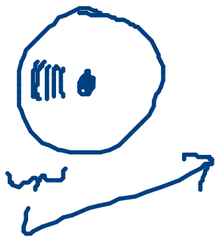
Schirm

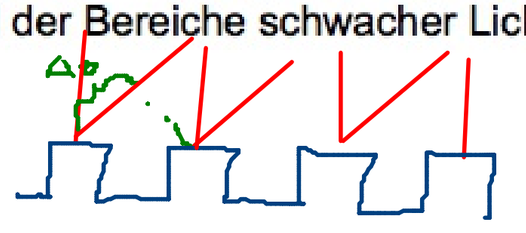


Der Laserstrahl trifft auf mehrere Stege, von denen jede Reflexion als Ursprung einer Huygensschen Elementarwelle betrachtet werden kann, die auf der Rückseite des Schirms interferieren. Ähnlich ist das Interferenzbild beim Durchscheinen eines Gitters.



1.2. Erklären Sie unter Nutzung einer sorgfältig angelegten Zeichnung qualitativ die Entstehung der Interferenzmaxima und der Bereiche schwacher Lichtintensität zwischen den Maxima.





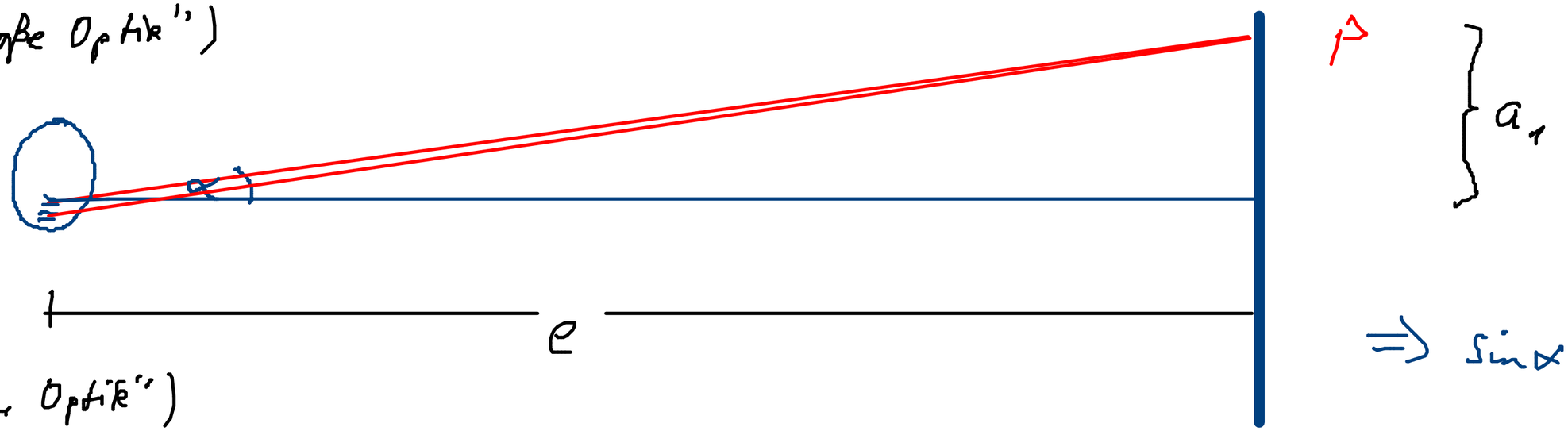
= Wellennormale in Richtung des Punktes P auf dem Schirm

(für alle Stege?)

Wenn $\Delta s = n \cdot \lambda$, dann überlagern sich die Huyg. Wellen in P konstruktiv, andernfalls löschen sie sich aus.

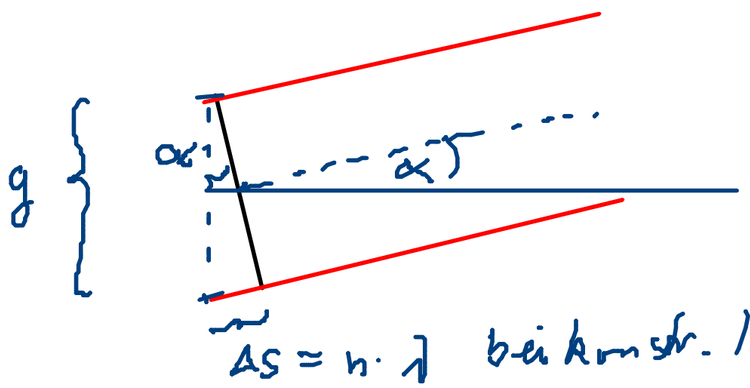
1.3. Im Abstand a_n von der Mitte (vom Maximum 0. Ordnung) ist dann ein Maximum der Ordnung n zu beobachten, wenn die Bedingung $\frac{n\lambda}{g}=\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+e^2}}$ erfüllt ist. Dabei bezeichnet g den Stegabstand und e den Abstand des Schirms von der CD. Leiten Sie diese Beziehung anhand einer Zeichnung begründet her und berechnen Sie mithilfe der Messwerte von a_1 und e den Stegabstand g der CD. *(Daten aus dem Experiment stehen an der Tafel.)*

(„große Optik")



$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+e^2}}$$

(„kleine Optik")



$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\Delta s}{g} = \frac{n\cdot\lambda}{g}$$

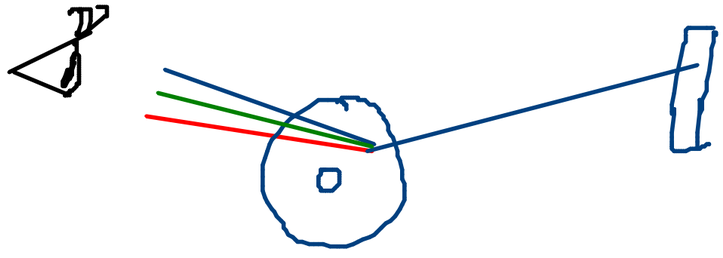
$$\Rightarrow \frac{1\cdot\lambda}{g} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+e^2}} \Leftrightarrow g = \frac{\sqrt{a_1^2+e^2}\cdot\lambda}{a_1} = 1{,}7\,\mu m$$

Exp.: $a_1 = 0{,}12\,m$

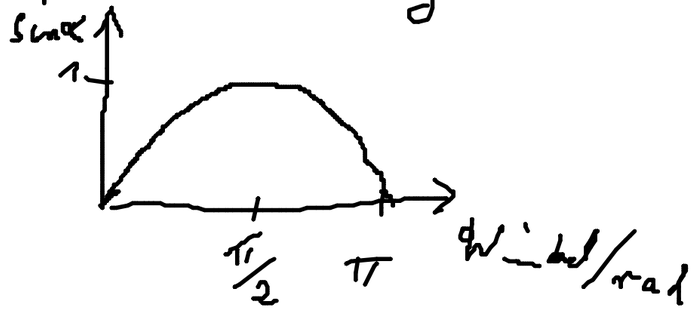
$e = 0{,}3\,m$

(Wikipedia: 1,6 µm)

1.4. Wenn man eine CD in den Händen hält, fallen sofort die sichtbaren farbigen Spektren auf. Halten Sie die Ihnen zur Verfügung gestellte CD waagerecht mit dem Etikett in Richtung zum Fußboden, so dass das Licht der Deckenlampe (Leuchtstoffröhre) Spektren erzeugt. Kippen Sie die CD nun so zur Lampe hin, dass sich die Spektren gut beobachten lassen. Beschreiben Sie die Farberscheinungen und erläutern Sie das Zustandekommen. Gehen Sie hierbei insbesondere auf die Reihenfolge der Farben ein. Ergänzen Sie Ihre Erläuterungen gegebenenfalls mit qualitativen Skizzen.



$\sin\alpha = \frac{n \cdot \lambda}{g}$, m.a.W. $\sin\alpha \sim \lambda$



$\Rightarrow$ für $\alpha \in [0; \pi/2]$ gilt:

Je größer λ, desto größer α, unter dem das Maximum dem Beob. erscheint.

2.1. Formulieren Sie die Einsteinschen Postulate der speziellen Relativitätstheorie.

2.2. Der (nach unserer Sonne) nächste Stern ist Alpha Centauri am südlichen Sternenhimmel (*die gleichnamige Fernsehsendung auf BR-α mit Prof. Lesch ist unbedingt empfehlenswert*). Seine Entfernung beträgt 4,5 Lichtjahre.

a) Wie lange braucht ein Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v = 0{,}5\,c$ von der Erde aus gesehen, um zum Stern zu gelangen?

b) Wie lange dauert der Flug für die Astronauten?

c) Welche Geschwindigkeit müßte das Raumschiff haben, wenn für die Besatzung nur ein Jahr verginge?

2.1. siehe Metzler

2.2. a) $t_R = \frac{s}{v} = \frac{4{,}5\,Lj}{0{,}5c} = \frac{4{,}5\,a \cdot c}{0{,}5 \cdot c} = \frac{4{,}5\,a}{0{,}5} = 9\,a$

b) $t = t_R \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 9\,a \cdot \sqrt{1-0{,}5^2} = 9\,a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\,a \cdot 0{,}866 = 7{,}8\,a$

c) $t_R = \frac{s}{v}$, v ist aber gesucht; andererseits: $t_R = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ mit $t = 1\,a$

$\Rightarrow \frac{s}{v} = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ $\qquad s = 4{,}5\,Lj$, $t = 1\,a$, $c = 3 \cdot 10^8\,m/s$

$\Rightarrow t = \frac{s}{v} \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow t^2 = \frac{s^2}{v^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{s^2}{v^2} - \frac{s^2 v^2}{v^2 c^2} = \frac{s^2}{v^2} - \frac{s^2}{c^2}$

$\Rightarrow \frac{1}{v^2} = \frac{t^2 + s^2/c^2}{s^2} \Rightarrow v^2 = \frac{s^2}{t^2 + s^2/c^2} = \frac{(4{,}5\,a)^2 \cdot c^2}{(1\,a)^2 + (4{,}5\,a)^2}$

$\Rightarrow v = 0{,}976\,c$

---

alternativ mit Abschätzung $v \approx c$: $t_R \approx 4{,}5\,a \Rightarrow \frac{t}{t_R} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{t^2}{t_R^2}$

$\Rightarrow v = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4{,}5}\right)^2} \cdot c$

$= 0{,}975\,c$

2.3. Die Zeitdilatation läßt sich experimentell an schnellen Myonen bestätigen. Myonen sind instabile Elementarteilchen, die mit einer Halbwertszeit von $1{,}52\,\mu s$ zerfallen, d.h. nach $1{,}52\,\mu s$ existiert nur noch die Hälfte der Myonen, nach $3{,}04\,\mu s$ nur noch ein Viertel usw. Diese Zeit kann als Uhrentakt im Eigensystem S' der bewegten Myonen angenommen werden. In einem Gedankenexperiment soll ein Beschleuniger kontinuierlich Myonen mit der Geschwindigkeit v = 0,9994c ins Vakuum liefern. Die relative Myonenzahl wird entlang einer Messstrecke im Laborsystem S registriert.

a) Zeigen Sie, dass aus klassischer Sicht folgende Messwerte zu erwarten wären:

Messort x in m	0	456	911	1370
Myonenanzahl N in %	100	50	25	12,5

b) Berücksichtigt man die Ergebnisse realer Messungen in diesem Gedankenexperiment, hätte sich die Myonenanzahl jedoch erst in einer Entfernung x = 13,16km vom Beschleuniger auf die Hälfte verringert. Weisen Sie nach, dass sich dieser Wert über eine Rechnung mit einem relativistischen Ansatz bestätigen lässt.

c) Berechnen Sie die Halbwertszeit der Myonen im Laborsystem S.

a) $s_{1/2} = v \cdot 1{,}52\,\mu s = 456\,m$

$s_{1/4} = v \cdot 2 \cdot 1{,}52\,\mu s = 911\,m$

$s_{1/8} = v \cdot 3 \cdot 1{,}52\,\mu s = 1367\,m$

b) Die Myonen „messen" 456 m im System, das sich bewegt.

$\Rightarrow \quad l = \frac{456\,m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 13{,}17\,km$

c) (Eigenzeit immer die kürzeste Zeit.) $\quad t_R = \frac{t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 43{,}9\,\mu s$ $\quad t = 1{,}52\,\mu s$

2.4. $$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} = E_0 + E_{kin} \qquad mit\ E_0 = m_0 c^2 = Ruheenergie\ des\ Körpers\ der\ Masse\ m_0 \qquad \textbf{(1)}$$

Daraus ergibt sich die relativistische kinetische Energie zu .

$$E_{kin} = E - E_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}} - 1\right) \qquad \textbf{(2)}$$

Zeigen Sie, dass die relativistische kinetische Energie im Grenzfall „$v \ll c$" (d.h. $v^2/c^2 \ll 1$) in die klassische kinetische Energie $E_{kin} = \frac{1}{2} m_0 v^2$ übergeht.

(Tipp: Taylorentwicklung von $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$ *für kleine x, anwenden in* **(2)** *mit* $x = \frac{v^2}{c^2}$ *.)*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-3/2} \cdot (-1) = \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-3/2}$$

$$T(x) = \frac{f(0)}{0!} \cdot x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x^1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1x = 1 + \frac{x}{2} \rightarrow (2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \Rightarrow E_{kin} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} - 1\right) = m_0 c^2 \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$