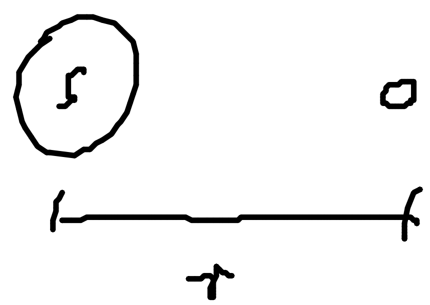
PhLk_Abi2014

Die spezielle Relativitätstheorie (Metzler S. 350)

30 km/s ? Wo kommt das her?



$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 150\,000\,000\,\text{km}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,\text{s}} = 30\,\text{km/s}$$

$\hat{=} \frac{1}{10}$ ‰ von c

Galilei'sches Trägheitsprinzip: Ein sich selbst überlassener Körper bewegt sich ohne äußere Einwirkung geradlinig gleichförmig oder bleibt in Ruhe.

Ein Bezugssystem, in dem "frei" bewegliche Körper dem Trägheitsprinzip folgen, heißt Inertialsystem (inertia, lat.:Trägheit).

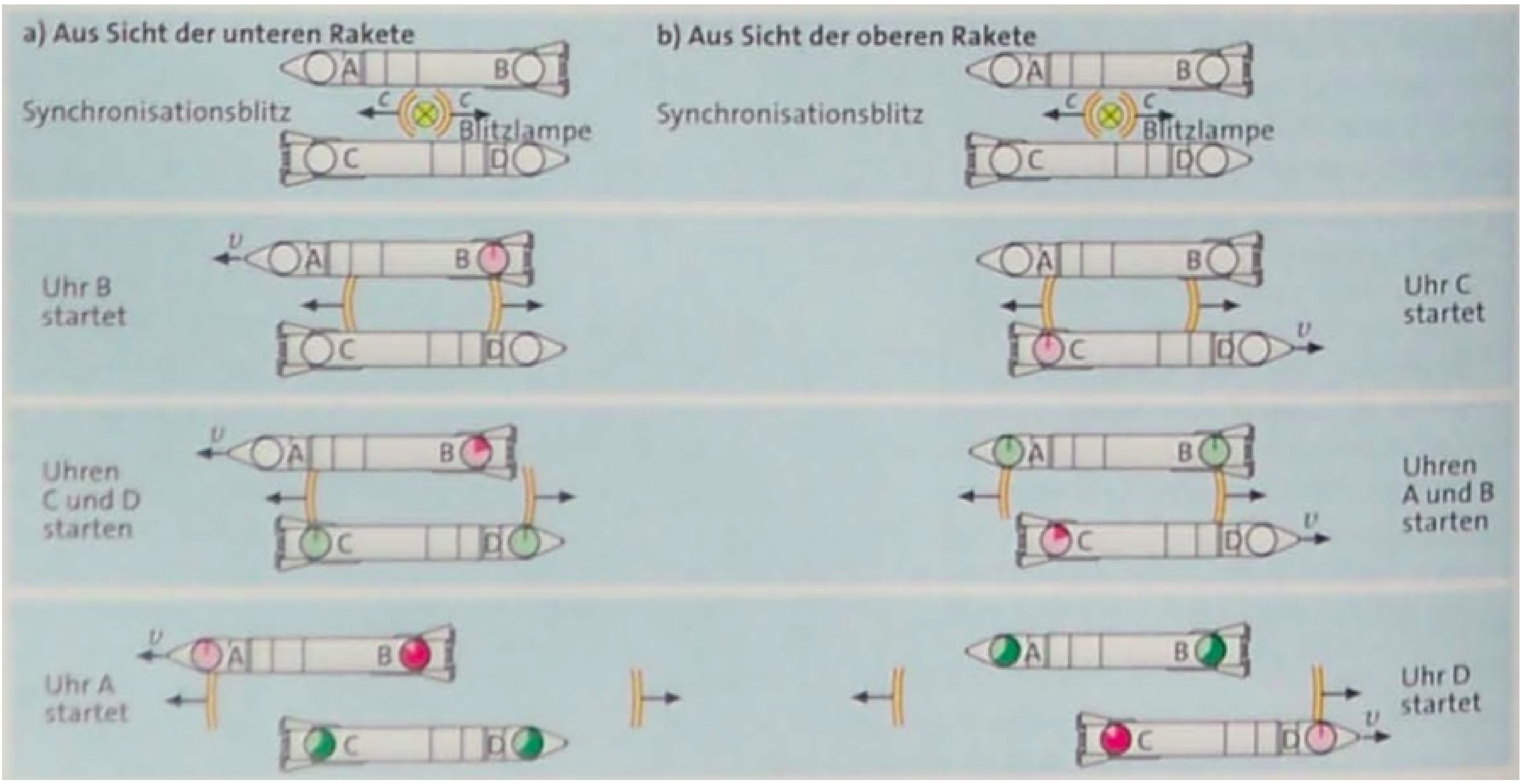
1. Postulat – Relativitätsprinzip: Alle Inertialsysteme sind zur Beschreibung von Naturvorgängen gleichberechtigt. Die Naturgesetze haben in allen Inertialsystemen die gleiche Form.
2. Postulat – Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: In allen Inertialsystemen breitet sich Licht im Vakuum isotrop und unabhängig von der momentanen Bewegung der Lichtquelle mit der Geschwindigkeit $c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8$ m/s $\approx 300\,000$ km/s aus.

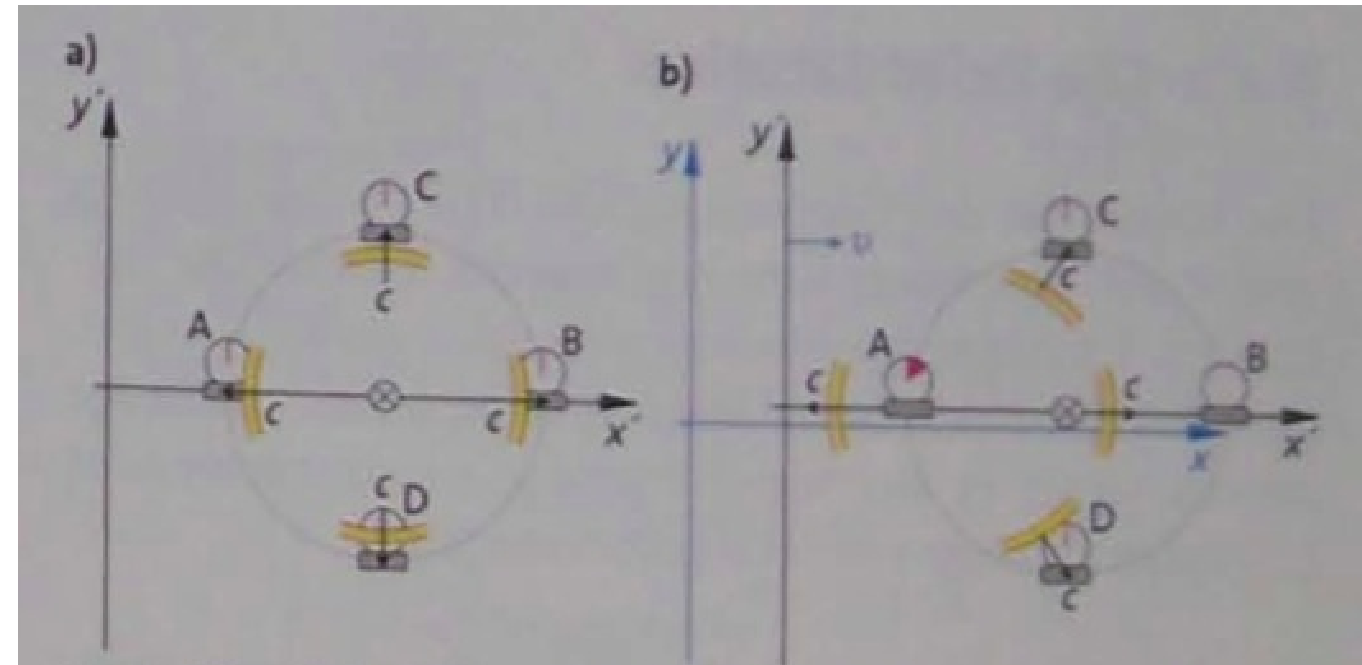
Aus diesen Postulaten lassen sich alle Gesetzmäßigkeiten der speziellen Relativitätstheorie (Relativität der Gleichzeitigkeit, Zeitdilatation, Längenkontraktion, dynamische Masse etc.) herleiten!

(Das 2. Postulat wird bestätigt durch das Michelson-Morley-Experiment.)

Relativität der Gleichzeitigkeit

"Gleichzeitig ist gleichzeitig nicht gleichzeitig"





353.1 a) Im System I′ werden die Uhren A, B, C, D synchronisiert. **b)** Aus Sicht des Systems I, in dem sich I′ mit v bewegt, werden die Uhren A und B nicht synchron in Gang gesetzt, wohl aber die Uhren C und D.

Relativität der Gleichzeitigkeit: Sind zwei Ereignisse E_1 und E_2, die verschiedene x-Koordinaten x_1 und x_2 in einem System I haben, in diesem System *gleichzeitig*, so sind sie in einem anderen, relativ zum ersten in x-Richtung bewegten System I′ *nicht gleichzeitig*. Haben die Ereignisse jedoch gleiche x-Koordinaten, aber verschiedene y- oder z-Koordinaten, so sind die Ereignisse auch in I′ gleichzeitig, wenn sie in I gleichzeitig stattfinden.

Die Zeitdilatation

Eigentlich haben die Begriffe bewegt und ruhend in der Relativitätstheorie ihren Sinn verloren, da ein bewegtes System auch als ruhend und ein ruhendes als bewegt angesehen werden kann: Entscheidend ist nur die Relativbewegung.

Da die beiden Begriffe aber dennoch weiterhin verwendet werden, muss erklärt werden, was damit gemeint ist.

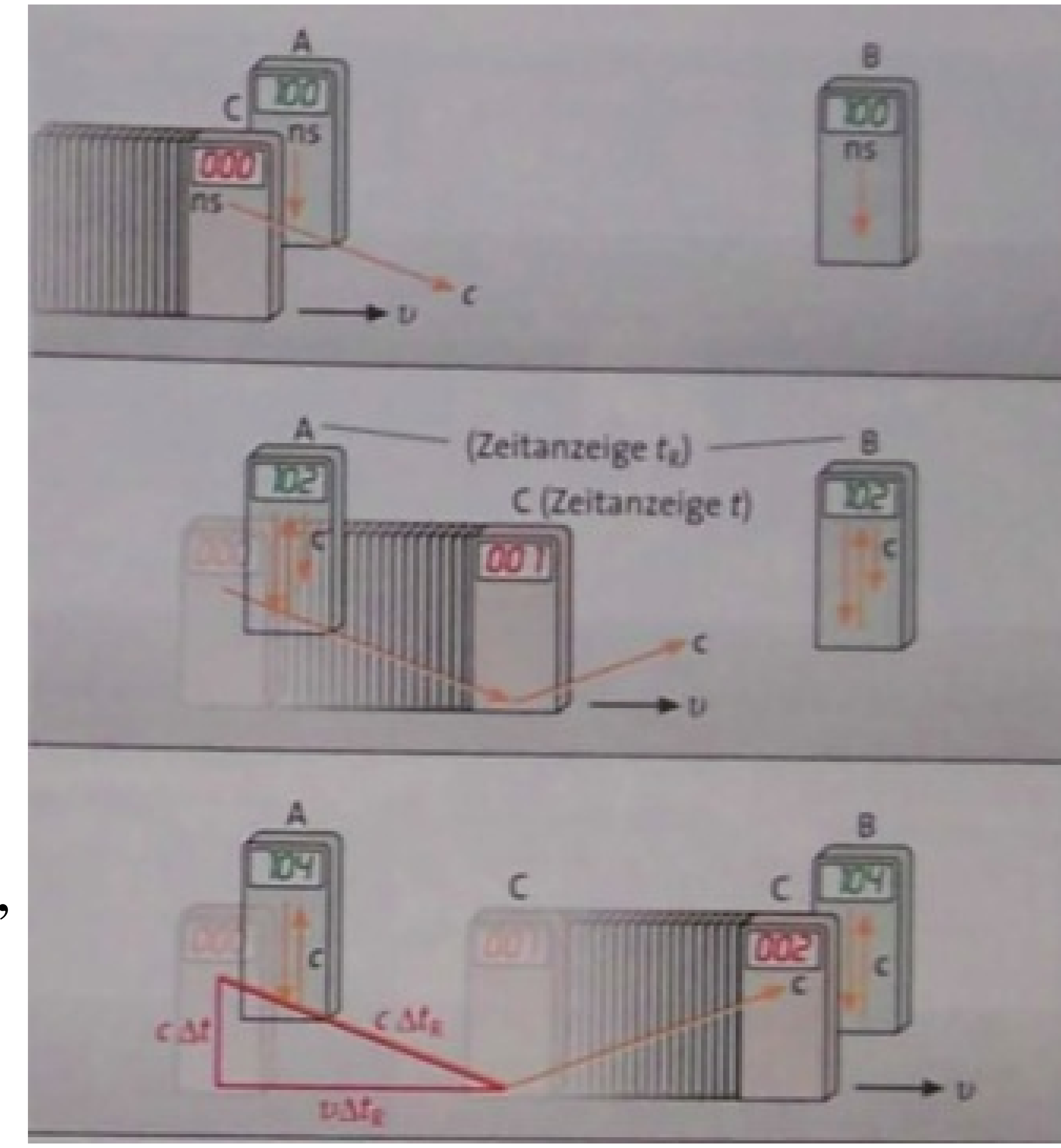
Als ruhend wird das Inertialsystem bezeichnet, in dem die zur Zeitmessung aufgestellten synchronisierten Uhren auch als synchron gehend angesehen werden. Dieses System ist dadurch vor anderen bewegten Inertialsystemen ausgezeichnet, in denen die Uhren - obwohl in ihrem System synchronisiert - aus Sicht des ruhenden Systems nicht mehr syncnron gehen können. Da eine in diesem Sinne bewegte Uhr nicht mit anderen Uhren synchronisiert ist, können mit ihr nur Zeitspannen zwischen Ereignissen gemessen werden, die am Ort der Uhr stattfinden.

Im Gedankenexperiment wurde Δt allein von der bewegten Uhr C angezeigt. Die von einer bewegten Uhr gemessene Zeitspanne wird als Eigenzeit bezeichnet. Ausführlich kann daher formuliert werden:

Die von einer bewegten Uhr gemessene Eigenzeit Δt ist kleiner als die von ruhenden synchronisierten Uhren gemessene Zeit Δt_R für denselben Vorgang.

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Merkregel:
Die Eigenzeit ist immer die kürzeste Zeit.



Aufgabe:
Berechne v, mit der sich die Uhr C relativ zu den Uhren A und B bewegt.

$$2\,ns = 4\,ns \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{3}{4} c^2 \Rightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$$

$$\Rightarrow v = 2{,}6 \cdot 10^8 \, m/s$$

Aufgaben zur Zeitdilatation

Ein 30-jähriger Weltraumfahrer startet im Jahre 1999 zu einer Reise durch das Weltall. Seine durchschnittliche Reisegeschwindigkeit beträgt relativ zur Erde gemessen v = 40/41 c.

Wie alt ist der Weltraumfahrer, wenn er im Jahre 2030 zurückkehrt?

$$\Delta t = 31\,a \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 6{,}8\,a$$

$$\Rightarrow \text{Alter: } (30+6{,}8)\,a \approx 37\,a$$

(statt 61 a!)

Im Jahre 1995 startet ein 20-jähriger Astronaut zu einer Weltraumreise. Da seine Rakete mit v = 60/61 c fliegt und damit fast Lichtgeschwindigkeit erreicht, kann er während seiner 33 Jahre dauernden Reise auch den 9,7 Lichtjahre entfernten Sirius besuchen.

a) Welches Jahr schreibt man auf der Erde, wenn der Astronaut als 53-jähriger zurückkehrt?

b) Wie alt ist der Astronaut, wenn er auf seinem direkten Flug zu Sirius diesen Stern passiert?

c) Wie schnell hätte der Astronaut fliegen müssen, um während seiner 33 Jahre dauernden Weltraumreise den 2 Millionen Lichtjahre entfernten Andromedanebel zu besuchen?

$$1\,L_y = c \cdot 1a = 300000\,\frac{km}{s} \cdot 1a = 300000\,\frac{km}{s} \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\,s$$
$$= 9{,}46 \cdot 10^{15}\,m = 9{,}46 \cdot 10^{12}\,km$$

a) $v = \frac{60}{61}c$ 1995 (20)

$$\Delta t = 33\,a$$

$$\Rightarrow \Delta t_R = \frac{33\,a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 183\,a$$

$\Rightarrow$ AD 2178

b) $\Delta t_R = \frac{9{,}7\,L_y}{60/61\,c} = 9{,}86\,a$

$$\Rightarrow \Delta t = 1{,}78\,a$$

c) $\Delta t = 33\,a$, $\Delta t_R = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^6\,L_y}{c} = 4 \cdot 10^6\,a$

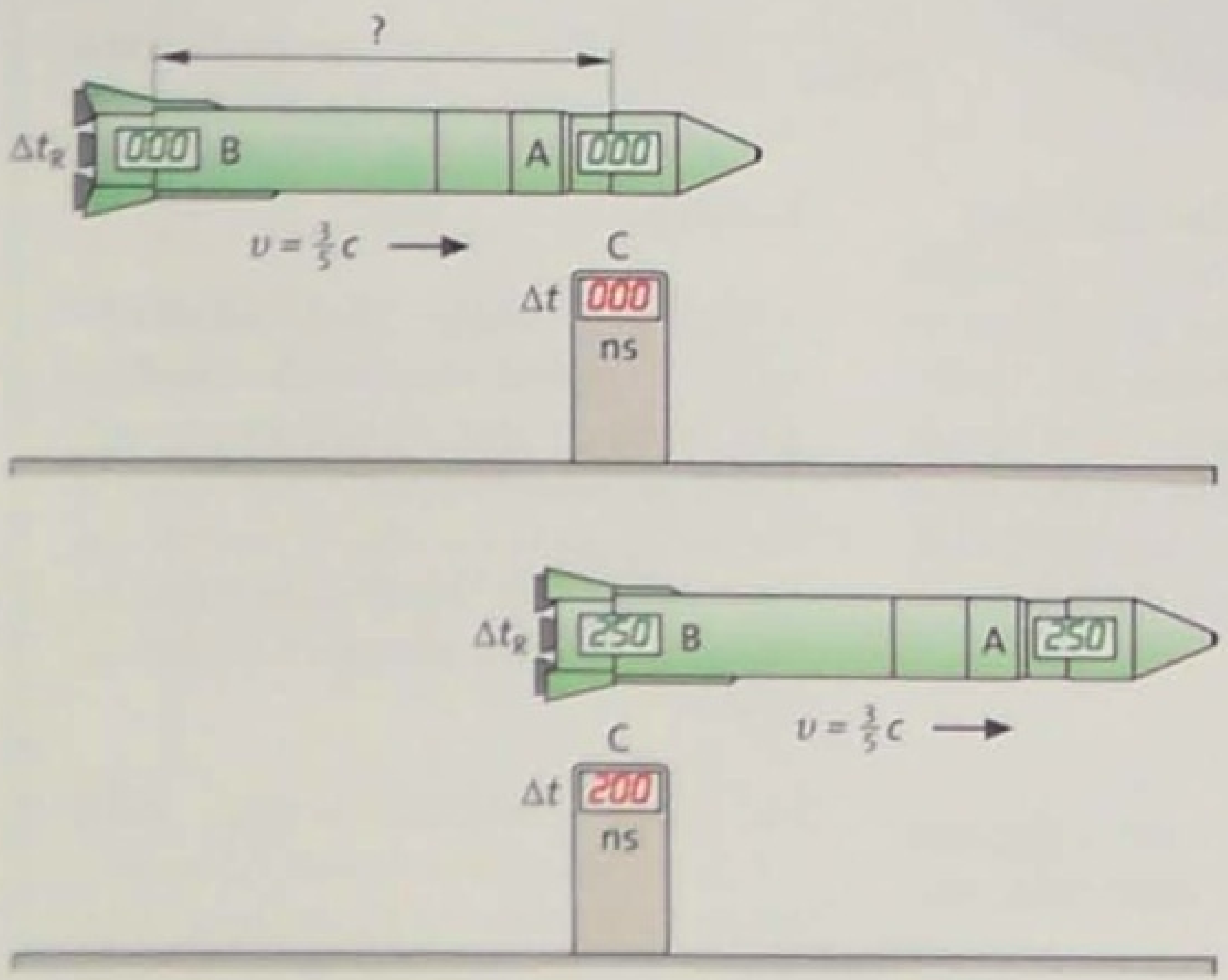
$$\Rightarrow \frac{33}{4 \cdot 10^6} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{33}{4 \cdot 10^6}\right)^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{1-\left(\frac{33}{4 \cdot 10^6}\right)^2} \cdot c$$

=

Längenkontraktion



358.1 Um die Länge eines Raumschiffs zu bestimmen, wird die Zeit zum Überfliegen der Uhr C gemessen. Die Raumschiffuhren A und B messen eine andere Zeit als die Uhr C.

[redacted] Die synchronisierten Uhren A und B messen im Ruhesystem der Rakete die Zeitspanne Δt_R, woraus sich die Eigenlänge zu $l = v\,\Delta t_R$ ergibt. Die Uhr C misst die kürzere Zeitspanne Δt, was zur kontrahierten Länge $l_K = v\,\Delta t$ führt. Eingesetzt in die Gleichung für die Zeitdilatation (→ 9.2.2)

$$\Delta t = \Delta t_R \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

ergibt sich die Formel für die Längenkontraktion:

Längenkontraktion: Die Eigenlänge l im Ruhesystem eines Körpers wird in einem anderen Inertialsystem I_K, das sich in der Längsrichtung des Körpers mit der Relativgeschwindigkeit v bewegt, als kontrahierte Länge l_K gemessen. Es gilt die Beziehung

$$l_K = l\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Senkrecht zur Bewegungsrichtung tritt keine Kontraktion auf, da Gleichzeitigkeit in y- und z-Richtung für jedes Bezugssystem gilt (→ 9.2.1).

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Eigenlänge l und die kontrahierte Länge l_K der Rakete in **Abb. 358.1**.
2. Myonen werden in 20 km Höhe von der primären Höhenstrahlung erzeugt und fliegen mit $v = 0{,}9998\,c$ auf die Erde zu. Berechnen Sie die Ausdehnung, die die Atmosphärenschicht von 20 km für die Myonen hat.

1. $l = v \cdot \Delta t_R = 45\,\text{m}$

   $l_K = v \cdot \Delta t = 36\,\text{m}$

2. $l_K = 20\,\text{km} \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 400\,\text{m}$

In einem Linearbeschleuniger wird ein Elektron auf die Geschwindigkeit v = 0,6c beschleunigt. Anschließend durchfliegt es mit konstanter Geschwindigkeit eine Strecke AB von 9 m Länge.

a) Wie lange braucht das Elektron, um diese Strecke zu durchfliegen?

$$t = \frac{s}{v} = 50\,ns = \Delta t_R$$

b) Wie lang ist die Strecke im Ruhsystem des Elektrons?

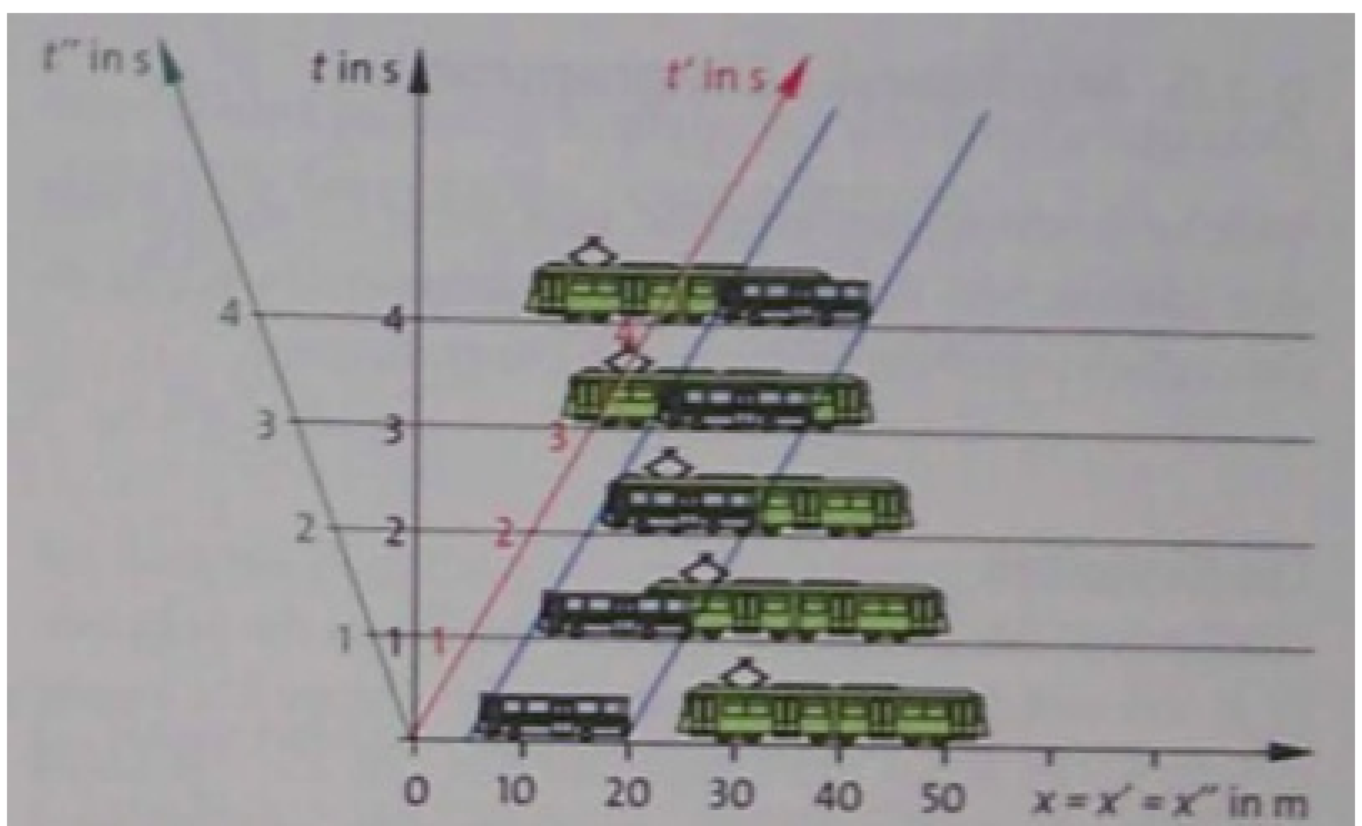
$$l_K = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 7{,}2\,m$$

c) Welche Zeit vergeht im Ruhsystem des Elektrons, bis die Strecke durchflogen ist?

$$\Delta t = \Delta t_R \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 40\,ns$$

$$\left(= \frac{7{,}2\,m}{0{,}6\,c} = 40\,ns \right)$$

Raum-Zeit-Diagramme



359.1 Die Bewegungen einer Straßenbahn und eines Busses aus der Sicht von drei Inertialsystemen. Eingezeichnet sind die Weltlinien des vorderen und hinteren Endes des Busses. Die drei Zeitachsen sind die Weltlinien der jeweiligen Koordinatenursprünge.

Ereignisse werden durch Bildpunkte in Raum-Zeit-Diagrammen dargestellt. Die Menge der Bildpunkte der Ereignisse eines Körpers ergibt dessen Weltlinie. In schiefwinkligen Diagrammen liegen ebenso wie in rechtwinkligen Diagrammen die Bildpunkte zeitgleicher Ereignisse auf einer Parallelen zur Ortsachse, die von ortsgleichen Ereignissen auf einer Parallelen zur Zeitachse.

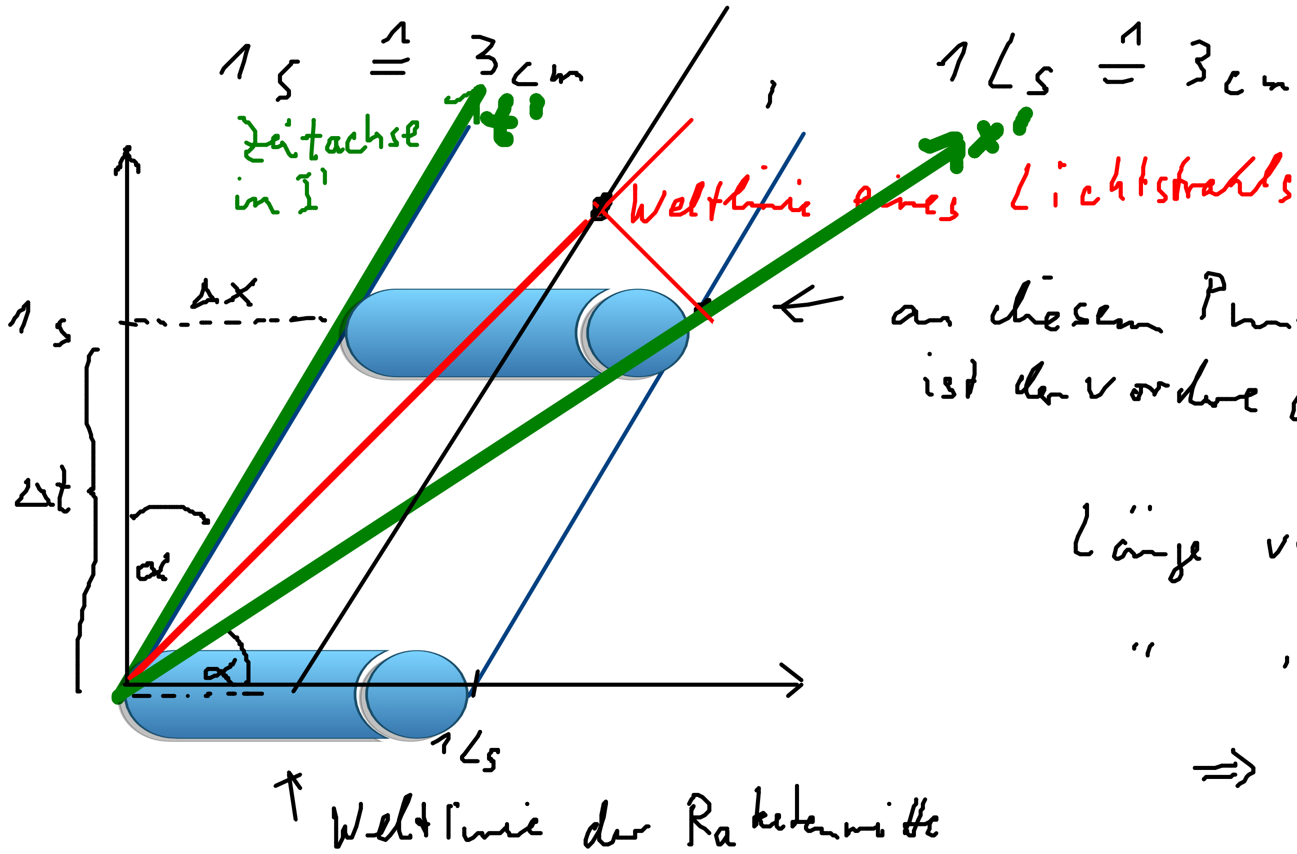
Minkowski-Diagramme

1. Wähle Einheiten für x- und t-Achse!

$\Delta t = 1\,s$, $\Delta x = 1\,Ls$ (= 300000 km)

2. Wähle Zeicheneinheit!

$1\,s \mathrel{\hat{=}} 3\,cm$, $1\,Ls \mathrel{\hat{=}} 3\,cm$



I' ist relativ zu I mit $v = 0{,}6\,c$

← an diesem Punkt in I' ist der vordere Lichtstrahl losgeschickt worden

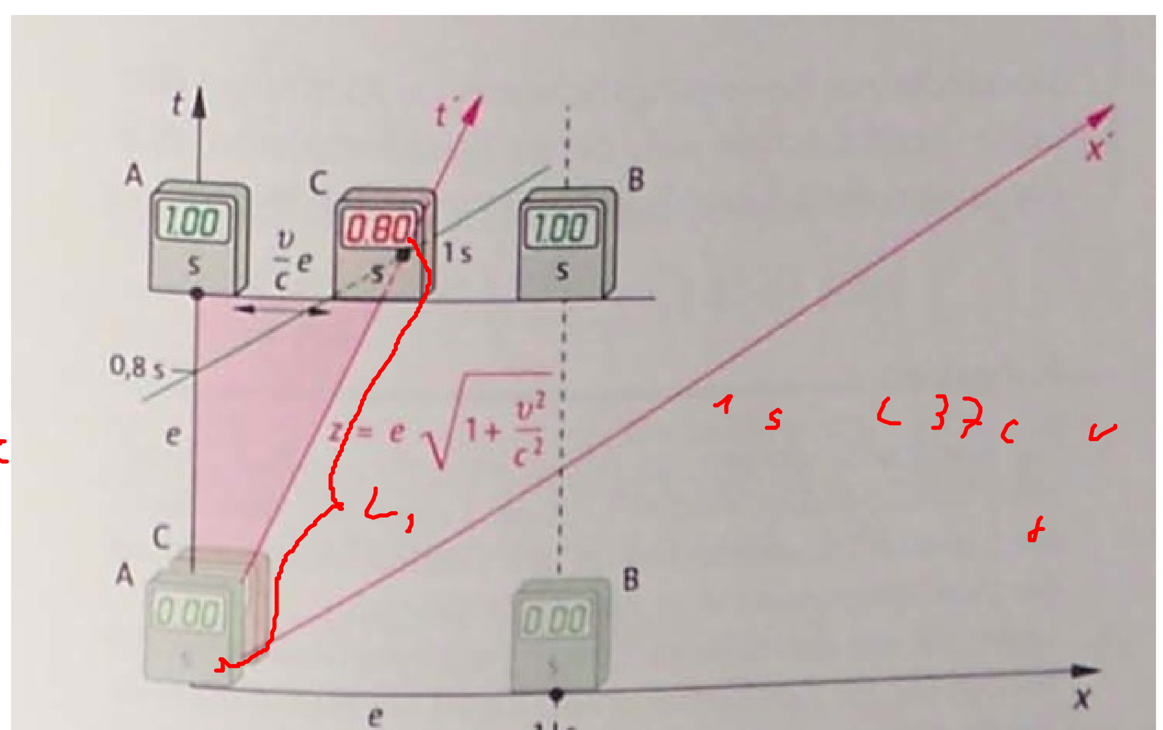
Länge von Δx im Diagramm: 1,8 cm ($\hat{=}$ 0,6 Ls)

" " Δt " " : 3 cm

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1{,}8}{3} = 0{,}6 \Leftrightarrow \tan^{-1} 0{,}6 = \alpha$

$= \frac{v}{c}$ $\qquad \boxed{\tan^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) = \alpha}$

Damit kann man schonmal die Achsen zeichnen.



361.1 Zur Relation der Zeicheneinheiten: Im rechtwinkligen System I (x, t) ruhen die Uhren A und B, im spitzwinkligen System I' (x', t') ruht die Uhr C.

3c

$e' = 4{,}37\,cm \Leftarrow e = 3\,cm$

z ist kürzer als das gesuchte e' (genauer: e'_t)

(*) $z = e'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

(**) mit Pythagoras

$e^2 + \left(\frac{v}{c} e\right)^2 = z^2$

$\Leftrightarrow z = \sqrt{e^2 + \left(\frac{v}{c}\right)^2 e^2} = e \cdot \sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}$

$(*) = (**) \Rightarrow e' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = e \cdot \sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}$

$\Rightarrow \boxed{e' = \sqrt{\frac{1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}} \cdot e}$

Und damit weiß man, wo man 1s bzw. 1 Ls auf der t'- bzw. x'-Achse zeichnen muss.

Lorentztransformation

Die Lorentztransformationsgleichungen ermöglichen das Umrechnen von Koordinaten eines Systems in die eines relativ dazu bewegten.
Sie lassen sich mit Hilfe von Minkowski-Diagrammen herleiten (siehe Metzler S. 362) oder mit Intuition (siehe http://de.wikibooks.org/wiki/Spezielle_Relativit%C3%A4tstheorie:_Teil_I#Die_Revolution_der_Physik_beginnt_bei_einigen_Gleichungen).

Lorentz-Transformationsgleichungen
Bewegt sich ein Inertialsystem I′ mit der Geschwindigkeit v relativ zu einem Inertialsystem I, so können die Koordinaten (t', x', y', z') bzw. (t, x, y, z) eines Ereignisses mit den beiden folgenden Gleichungssystemen ineinander umgerechnet werden:

$$t = k\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) \qquad t' = k\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

$$x = k(x' + v\,t') \qquad x' = k(x - v\,t)$$

$$y = y' \qquad y' = y$$

$$z = z' \qquad z' = z$$

mit $k = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Senkrecht zur Bewegungsrichtung (x-Richtung) tritt keine Zeitdilatation auf, daher transformieren sich die y- und die z-Koordinaten in einfacher Weise.

Mit ihrer Hilfe lässt sich das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten herleiten (vgl. Metzler S. 363):

Additionstheorem der Geschwindigkeiten
Bewegt sich in einem Inertialsystem I′ ein Körper in x'-Richtung mit der Geschwindigkeit u' und ist v die Relativgeschwindigkeit von I′ zu einem System I, so gilt für die Geschwindigkeit u des Körpers im System I

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}.$$

Bei Geschwindigkeiten im Alltag ist der Term $u'v/c^2$ stets so klein, dass er vernachlässigt werden kann. Dann folgt die bekannte Geschwindigkeitsaddition der Mechanik $u = u' + v$. Die Relativitätstheorie schließt die klassische Physik als Grenzfall ein.

Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass Licht, das von einem mit 0,99 c fliegenden Ion ausgesandt wird, sowohl in als auch entgegen der Flugrichtung Lichtgeschwindigkeit hat.
2. Ein radioaktiver Kern fliegt mit $v = 0{,}8\,c$ und sendet in seinem Ruhesystem Elektronen mit einer Geschwindigkeit von 0,6 c aus. Berechnen Sie die Geschwindigkeiten, die die Elektronen im Laborsystem in der Flugrichtung des Kerns und entgegen der Flugrichtung haben.