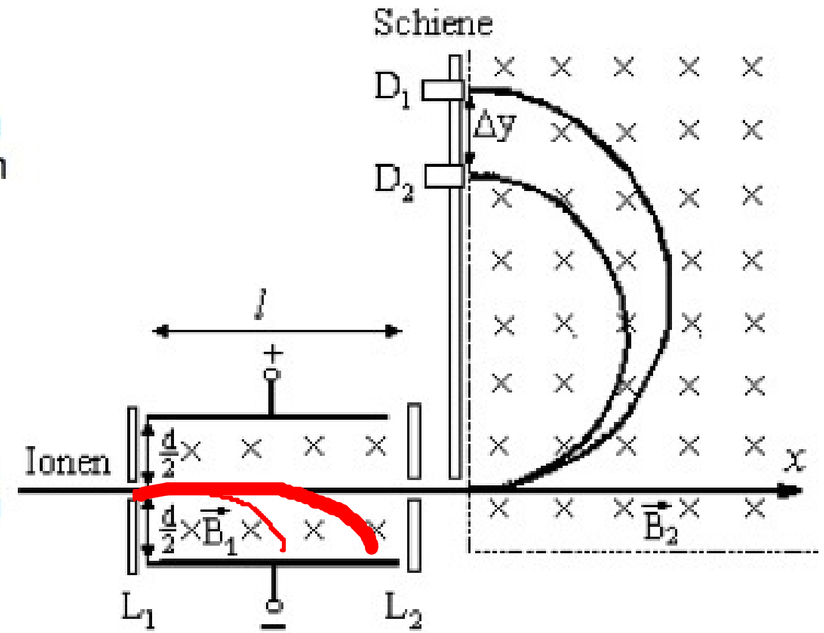
Massenspektrometrie Ein Massenspektrometer ist ein wichtiges Messinstrument in Chemie und Kernphysik. Es besteht im Wesentlichen aus einem Wienfilter, einem Raum mit einem weiteren Magnetfeld (hier B_2 genannt) und einem Detektoraufbau, wie z.B. in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. (Der Detektor kann auch aus einer Fotoplatte bestehen.)



Ein Gemisch aus einfach positiv geladenen Kohlenstoffionen ^{12}C und ^{14}C tritt durch eine Lochblende L_1 in einen Plattenkondensator mit dem Plattenabstand $d = 2{,}0\,cm$ und der Länge $l = 4{,}0\,cm$ ein. Die gesamte Anordnung befindet sich im Vakuum. Das Magnetfeld mit der Feldstärke B_1 ist zunächst abgeschaltet; an den Platten liegt die Spannung U.

1.1. Skizziere die Bahnen der Kohlenstoffionen unterschiedlicher Masse, aber gleicher Geschwindigkeit zwischen L_1 und L_2. Begründe, welche Bahn welchem Isotop zuzuordnen ist. *(Tipp: Betrachte die Bewegung als ungestörte Überlagerung einer unbeschleunigten Bewegung in x- und einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in y-Richtung. Bestimme zunächst a_y.)*

$x = v_x t$, $y = \frac{1}{2} a_y t^2$, $a_y = \frac{F}{m}$, $F = e E = e \frac{U}{d}$

$\Rightarrow a_y = \frac{eU}{dm} \Rightarrow a_y \sim \frac{1}{m}$

D.h.: Je größer m, desto kleiner die Beschl. in y-Rchtg.

1.2. Die Ionen treten nun mit einer Mindestgeschwindigkeit $v = 1{,}5 \cdot 10^5\, m/s$ in den Kondensator ein. Wie groß darf die Spannung am Kondensator höchstens sein, damit die Ionen nicht auf die Kondensatorplatten treffen? Berechne auch die dabei maximal auftretende Erhöhung der kinetischen Energie (in eV). *(Tipp: siehe Tipp zu 1.1. Bestimme zunächst die Zeit-Weg-Funktion y(t).)*

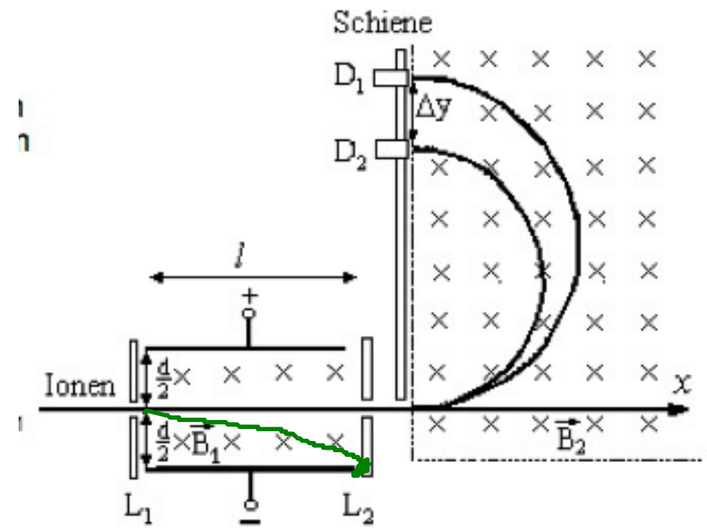
Am Kondensator liegt nun die Spannung $U = 700\, V$. Die Feldstärke B_1 soll so eingestellt werden, dass alle Ionen mit der Geschwindigkeit $v_0 = 2{,}5 \cdot 10^5\, m/s$ den Kondensator unabgelenkt durchqueren.

1.3. Berechne B_1 und begründe, dass Ionen beider Kohlenstoffisotope den Kondensator durch die Blende L_2 verlassen.

1.2 $y(x)$ gesucht

$$y(t) = \frac{1}{2} \frac{eU}{md} t^2 \qquad x = v_x t \iff t = \frac{x}{v_x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2} \frac{eU}{m d \cdot v_x^2} x^2$$



bei: $\frac{d}{2} = \frac{1}{2} \frac{eU}{m d \cdot v_x^2} \cdot l^2$

$\Rightarrow$ alle Teilchen mit $\frac{1}{2} \frac{eU}{m d v_x^2} l^2 < \frac{d}{2}$ schießen über die Platte hinaus

$$\iff U < \frac{d \cdot m v_x^2 d}{e l^2} = 704{,}5\, V$$

$[m = m_{^{12}C} = 12 \cdot u = 12 \quad 1{,}67 \quad 10^{-27}\, kg]$

$[d = 2\,cm,\ l = 4\,cm,\ v_x = v = 1{,}5 \cdot 10^5 \frac{m}{s},\ e = 1{,}6 \quad 10^{-19}\, C]$

max. E_k - Erhöhung $= 352\,V$, weil die Teilchen in der Mitte zwischen 0 u 704V in das Feld eintreten, also nur noch $U_b = \Delta\varphi = 704V - 352V = 352V$ durchlaufen.

1.2. Die Ionen treten nun mit einer Mindestgeschwindigkeit $v = 1{,}5 \cdot 10^5\, m/s$ in den Kondensator ein. Wie groß darf die Spannung am Kondensator höchstens sein, damit die Ionen nicht auf die Kondensatorplatten treffen? Berechne auch die dabei maximal auftretende Erhöhung der kinetischen Energie (in eV). *(Tipp: siehe Tipp zu 1.1. Bestimme zunächst die Zeit-Weg-Funktion y(t).)*

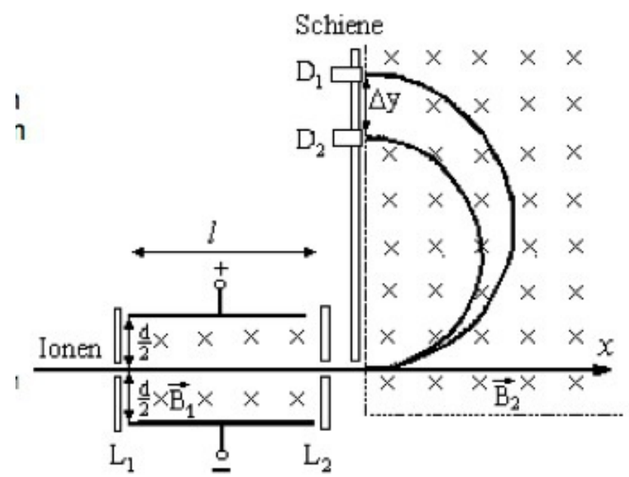
Am Kondensator liegt nun die Spannung $U = 700\, V$. Die Feldstärke B_1 soll so eingestellt werden, dass alle Ionen mit der Geschwindigkeit $v_0 = 2{,}5 \cdot 10^5\, m/s$ den Kondensator unabgelenkt durchqueren.

1.3. Berechne B_1 und begründe, dass Ionen beider Kohlenstoffisotope den Kondensator durch die Blende L_2 verlassen.

„gerade durch" $\Leftrightarrow \quad F_{el} = F_L$

$\Leftrightarrow \quad e \frac{U}{d} = e \cdot v_0 \cdot B_1$ unabh von m

$\Rightarrow \quad B_1 = \frac{U}{d \cdot v_0} = 0{,}14\ T$



Das Magnetfeld rechts von L_2 hat die Feldstärke $B_2 = 0{,}14\,T$. Die Teilchen, die den Kondensator verlassen, durchlaufen zwei Halbkreise.

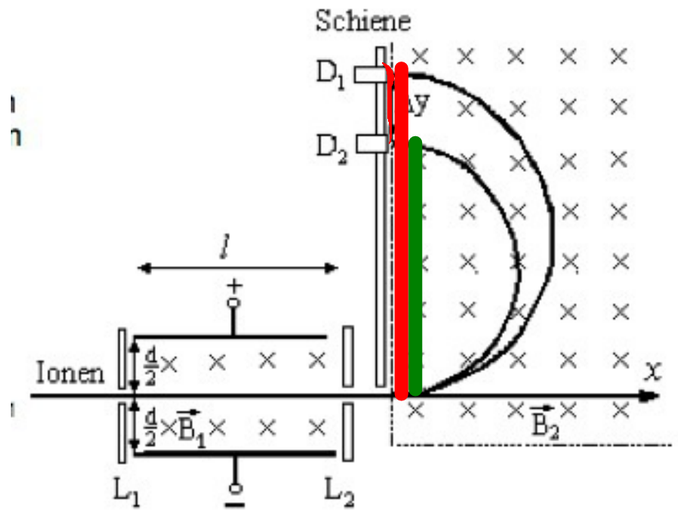
1.4. Zeige, dass für den Abstand Δy der beiden Punkte, an denen die Ionen das Magnetfeld wieder verlassen, gilt: $\Delta y = \frac{2 \cdot (m_{^{14}C} - m_{^{12}C}) \cdot v_0}{e \cdot B_2}$

$$\Delta y = d_1 - d_2$$

$$= 2 r_1 - 2 r_2 = 2 (r_1 - r_2)$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{v_0}{e B_2} (m_1 - m_2) \right)$$

q.e.d.



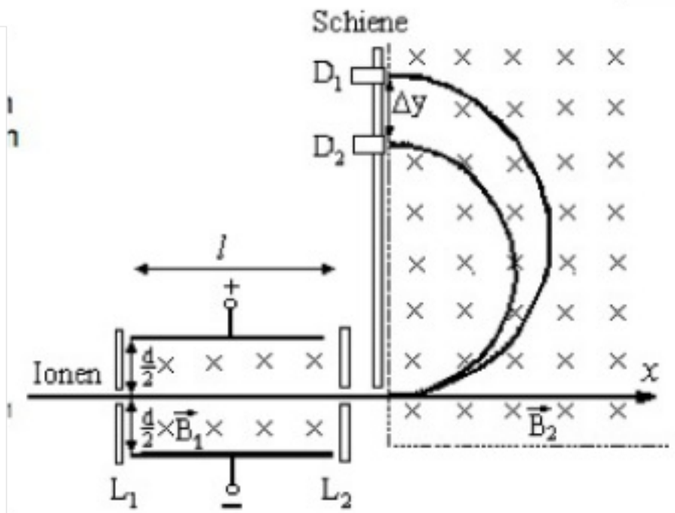
$$\frac{m v_0^2}{r} = e \, v_0 \cdot B_2$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{m v_0}{e B_2}$$

Die Flussdichte B_2 wird nun variiert, alle anderen Größen bleiben unverändert. Die Ionen sollen durch zwei verschiebbare Detektoren D_1 und D_2 registriert werden, die einen Mindestabstand von 1,5 cm haben. Die äußerste Position von D_1 ist 60 cm von der x-Achse entfernt.

1.5. Berechne, zwischen welchen Werten die Flussdichte B_2 liegen muss, damit beide Isotope gleichzeitig gezählt werden können.

(3 Tipps: 1. Jedesmal nach einer B_2-Änderung werden die Detektoren verschoben. 2. Die Verschiebung unterliegt nur den beiden Randbedingungen (1,5 cm/60 cm). 3. Dieser Aufgabenteil ist anspruchsvoll.)



$$\Delta y \geq 1{,}5\,cm$$

$$\Rightarrow \frac{2\,(m_{14C} - m_{12C}) \cdot v_0}{e\,B_2} \geq 1{,}5\,cm$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot (\cdot\ \cdot) \cdot v_0}{e \cdot 1{,}5\,cm} \geq B_2$$

$$\Rightarrow 0{,}7\,T \geq B_2$$

$$d_1 \leq 60\,cm$$

$$\Leftrightarrow 2r_1 \leq 60\,cm$$

$$\Leftrightarrow 2\,\frac{m_{14C}\,v_0}{e\,B_2} \leq 60\,cm$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\cdot}{e \cdot 60\,cm} \leq B_2$$

$$= 0{,}12\,T$$

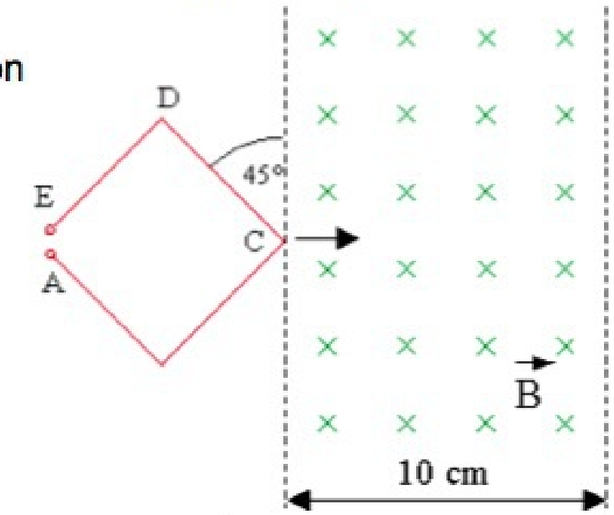
$$r_1 = \frac{m_{14C}\,v_0}{e\,B_2}$$

Endergebnis:

$$0{,}12\,T \leq B_2 \leq 0{,}7\,T$$

Induktion *1831 entdeckte Michael Faraday das Phänomen der elektromagnetischen Induktion bei seinem Bemühen, die Funktionsweise eines Elektromagneten (elektrischer Strom erzeugt ein Magnetfeld) umzukehren (Magnetfeld erzeugt Strom). Zur Erklärung des Phänomens gibt es zwei alternative Modelle: auf der Grundlage der Lorentzkraft auf bewegte Ladungen oder mit Hilfe der Änderung des magnetischen Flusses.*

Eine flache quadratische Spule mit 100 Windungen und einer Diagonalenlänge von $8{,}0\,cm$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $v = 0{,}50\,cm/s$ senkrecht zu den Feldlinien in ein räumlich begrenztes homogenes Magnetfeld der Stärke $|\vec{B}| = B = 0{,}40\,T$ geschoben (siehe Skizze). Die Seite $\overline{DC}$ schließt mit der linken Begrenzung des Magnetfeldes einen Winkel von 45° ein. Die Ausdehnung des Magnetfeldes nach rechts ist 10 cm. Die Enden A und E des Spulendrahtes sind Anschlüsse für ein empfindliches Spannungsmessgerät. Zum Zeitpunkt $t = 0\,s$ taucht die Spitze C der Spule in das Magnetfeld ein.

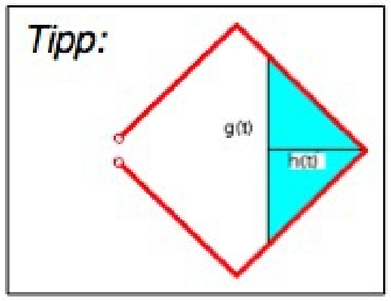


2.1. Zeige, dass der magnetische Fluss durch die Spule im Zeitintervall [0; 8s] durch die Gleichung $\Phi(t) = B \cdot v^2 \cdot t^2$ beschrieben wird.

2.2. Berechne den Betrag der zum Zeitpunkt $t = 8{,}0\,s$ induzierten Spannung. *[zur Kontrolle: 16 mV]*

2.3. Zeichne das Zeit-Spannungs-Diagramm der am Messgerät angezeigten Induktionsspannung für das Zeitintervall [0; 40s].

Tipp:



2.1

$A = \frac{1}{2} g \quad h$

oder $= h^2$

$h = h(t) = v \cdot t$

$\Rightarrow \Phi = B \quad A = B \, h^2$

$= B \cdot v^2 t^2$

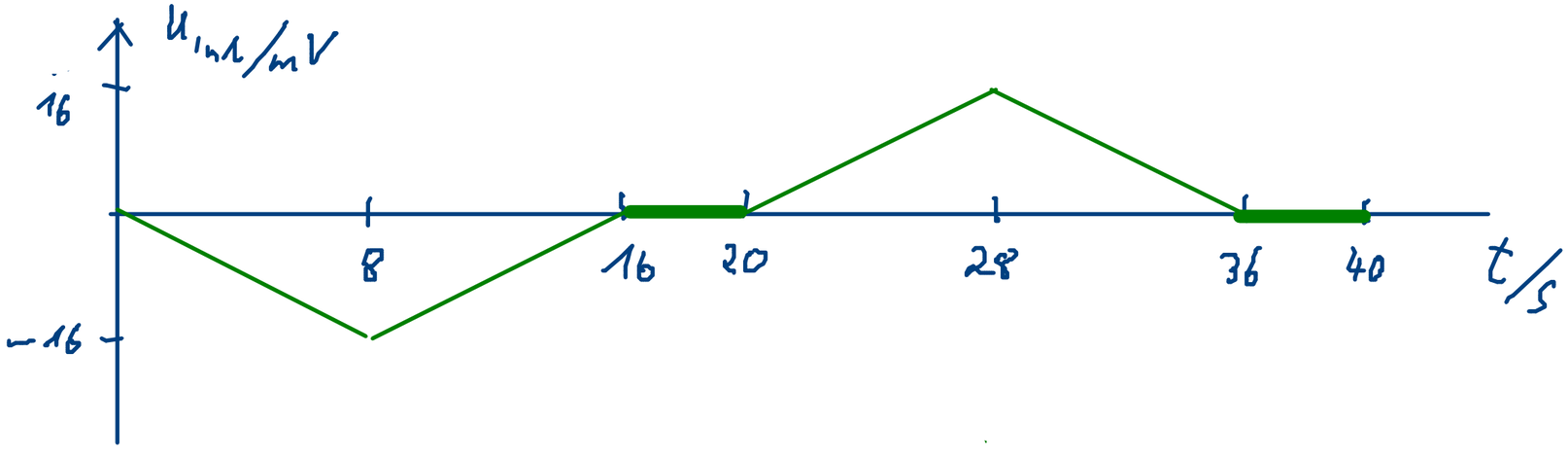
2.2

$U_{ind} = -N \dot{\Phi}$

$= -100 \quad B v^2 \quad 2t$

$\Rightarrow U_{ind}(8s) = -100 \quad 0{,}4T \cdot \left(0{,}005 \frac{m}{s}\right)^2 \cdot 2 \quad 8s = -16\,mV$

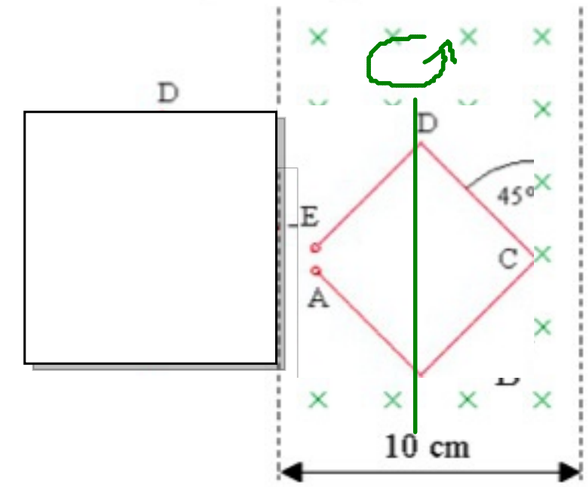
2.3.

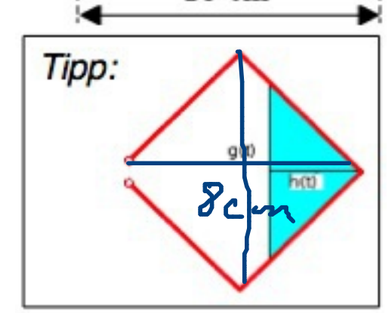


Im Folgenden befinde sich die Spule vollständig im Magnetfeld und rotiere um eine vertikale Achse durch D mit einer Frequenz von $f = 10\,Hz$.

2.4. Bestimme ausgehend vom allgemeinen Induktionsgesetz die Funktion $U_{Ind}(t)$.

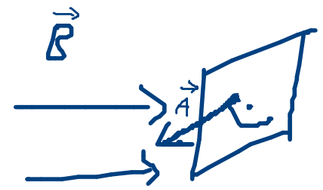
2.5. Berechne die maximale Induktionsspannung $\hat{U}$.





2.4

$$\phi = \vec{B}\,\vec{A}$$



$$= B\,A_0 \cdot \cos\measuredangle(\vec{B},\vec{A})$$

$$= B\,A_0 \cdot \cos(\omega t) \quad , \quad \omega = 2\pi f$$

$$\Rightarrow U_{Ind} = -N\,\dot{\phi} = \underbrace{-N \cdot B \cdot A_0\,(-\omega)}_{\hat{U} = U_{max}}\,\underbrace{\sin(\omega t)}_{\leq 1}$$

2.5

$$\Rightarrow \hat{U} = N \cdot B \cdot A_0 \cdot \omega = 100 \cdot 0{,}4\,T \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-3}\,m^2 \cdot 2\pi\,10\,Hz = \underline{\underline{8{,}04\,V}}$$

<-- 11.4.2013