

Herleitung des Brechungsgesetzes aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung

Das *Fermatsche Prinzip* ist ein Spezialfall des *Prinzips der kleinsten Wirkung*¹ („Hamiltonsches Prinzip“), das du sicher noch im Physik- oder Ingenieurstudium genauer kennenlernen wirst:

Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist stets so, dass die benötigte Zeit minimal ist.

Die genauere Formulierung lautet:

Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist stets so, dass die Zeit, die das Licht benötigt, invariant gegen kleine Änderungen des Weges ist.

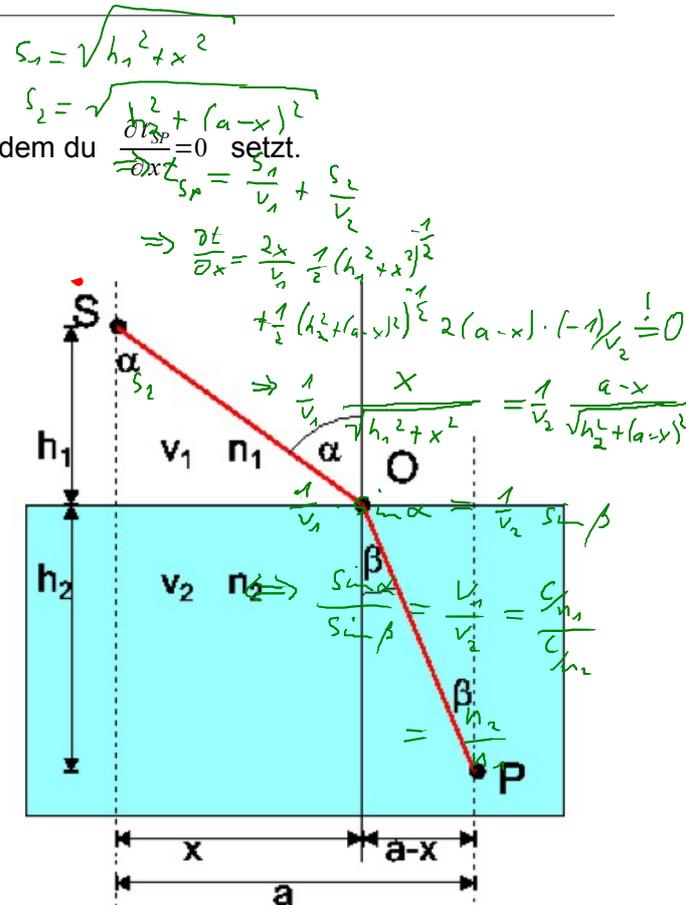
Aufgabe:

Leite die Funktion $t_{SP}(x)$ her und bestimme ihr Minimum, indem du $\frac{\partial t_{SP}}{\partial x} = 0$ setzt.

Bei geschickter Umformung folgt daraus das **Snelliussche Brechungsgesetz**.

Beachte folgendes:

- $t_{SP} = t_{S0} + t_{0P}$
- Zeit = Strecke durch Geschwindigkeit
- $v_i =$ Lichtgeschwindigkeit im Medium i
- $n_i := \frac{c}{v_i} =$ Brechungsindex des Mediums i
mit $c =$ Vakuumlichtgeschwindigkeit
- Die Summanden in $\frac{\partial t_{SP}}{\partial x}$ lassen sich durch trigonometrische Funktionen der Winkel ersetzen.



Ein Rettungsschwimmer S würde sich genau so verhalten: Da er am Strand (Medium 1) schneller laufen kann als in Medium 2 schwimmen, nimmt er nicht den kürzesten Weg zur ertrinkenden Person P, sondern läuft etwas weiter an Land.

Fazit: Licht verhält sich wie ein Rettungsschwimmer!

¹ Mit Hilfe dieses Axioms lässt sich nahezu die komplette Mechanik herleiten.

Wie groß ist die Querverschiebung q eines schräg durch eine Parallelplatte von der Dicke d laufenden Lichtstrahls?

a) Geben Sie eine allgemeine Formel an.

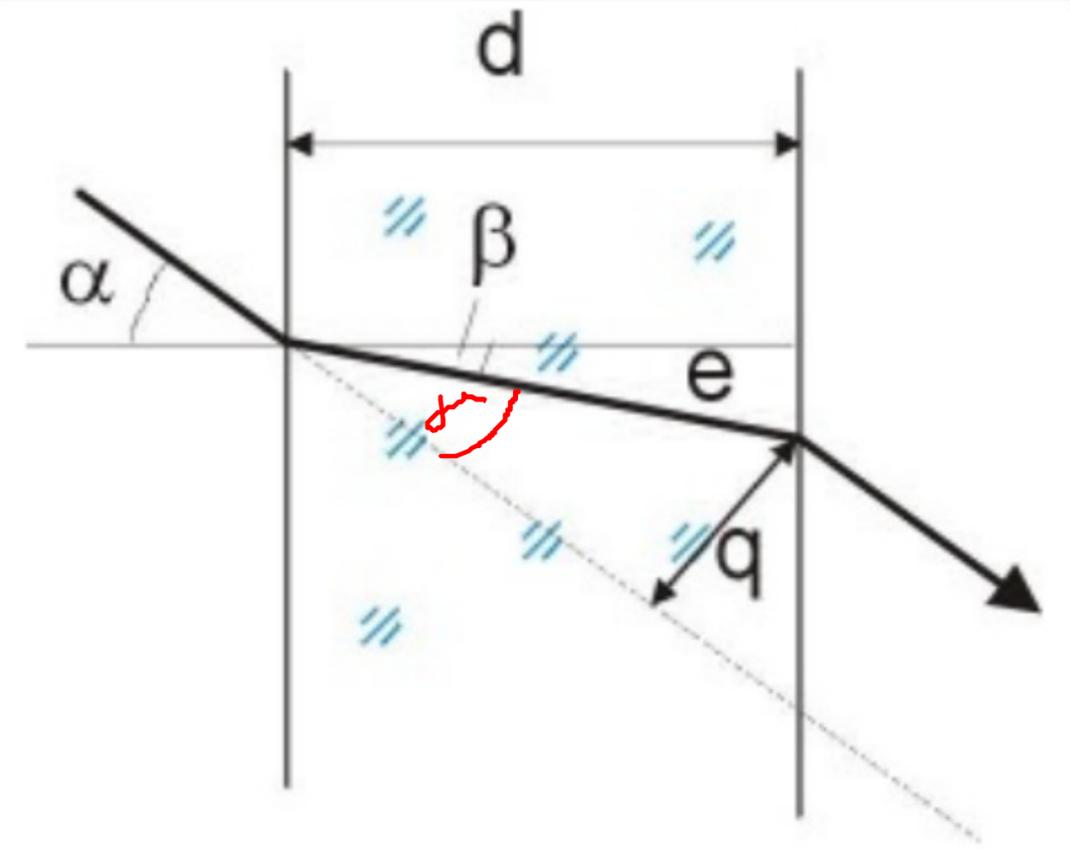
($q = f(d, \text{Alpha}, \beta)$)

b) Berechnen Sie q für $d = 6\text{mm}$, $\text{Alpha} = 40^\circ$ und $n = 1,5$.



$$\gamma = \alpha - \beta$$

$$q = \sin(\alpha - \beta) \cdot e$$



$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha - \beta \\ \sin \gamma &= \frac{q}{e} \\ q &= \sin \gamma \cdot e \\ q &= \sin(\alpha - \beta) \cdot e \\ q &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \cdot d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{d}{e} \\ e &= \frac{d}{\cos \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= 6\text{mm} \\ \alpha &= 40^\circ \\ n &= 1,5 \end{aligned}$$

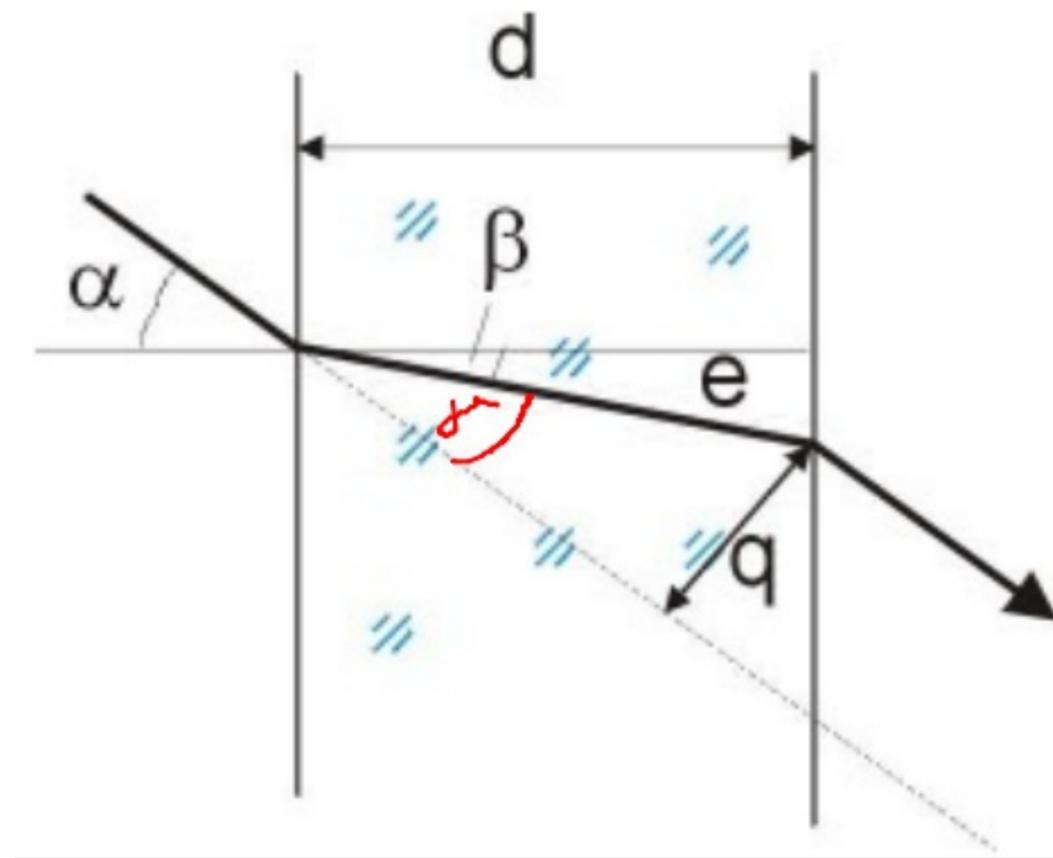
$$\begin{aligned} q &= \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \beta} \cdot d \\ q &= \frac{\sin(40^\circ - 25,4^\circ)}{\cos 25,4^\circ} \cdot 6\text{mm} \\ q &= 1,7\text{mm} \end{aligned}$$

1. Gesucht ist q als Funktion von

d , α und β

also $q = f(d, \alpha, \beta)$

(bzw. $q = f(d, \alpha, n)$)



Ansatz:

$$\gamma = \alpha - \beta$$

$$\sin \gamma = \frac{q}{e} \Leftrightarrow q = \sin(\alpha - \beta) \cdot e$$

(e statt, d fehlt)

...

2. Berechne q für $d = 6 \text{ nm}$, $\alpha = 40^\circ$, $n = 1,5$

<-- 31.10.2012