Allgemeine Hinweise:

- *Kommentieren Sie Ihre Lösungen! (Erläuterungen, Begründungen, Folgerungen)*
- *Rechnen Sie in SI-Einheiten (kg, m, s etc.)!*
- *Überprüfen Sie die physikalischen Einheiten in Ihren Rechenschritten und Lösungen! (Vor allem bei längeren Rechenwegen!)*
- *Lesen Sie die Aufgaben zunächst alle einmal und beginnen Sie dann mit der für Sie einfachsten Aufgabe!*

Erlaubte Hilfsmittel: *Taschenrechner, Formelsammlung, Schreibutensilien*

Aufgabe 1: Taylorentwicklung

Das mathematische Werkzeug der Taylorentwicklung ermöglicht die Darstellung von (unendlich oft stetig differenzierbaren) Funktionen als Potenzreihe, also als unendliche Summe. Das ist insbesondere in der Computerarithmetik wichtig, denn ein Computer kann nur addieren (damit ist er aber nicht unbedingt dümmer als manche Menschen ;-). Darüberhinaus läßt sich die Taylorentwicklung für einfache Abschätzungen („Approximationen“) komplizierter Funktionen verwenden, z.B.

$\sqrt{(b+x)} \approx \sqrt{(b)} + 1/\sqrt{(b)} \cdot x/2 \qquad [Bsp.: 51{,}58 = \sqrt{(2660)} = \sqrt{(2500+160)} \approx 50 + 1/50 \cdot 160/2 = 51{,}6]$

1.1. Bestimmen Sie die ersten vier Glieder der Taylorentwicklung (d.h. bis i = 3) um a = 0 für die Funktion f(x) = sin(x) und approximieren Sie damit die Funktion an den Stellen x = 0,5 und x = 1.

1.2. Wie 1.1. mit f(x) = cos(x).

1.3. Berechnen Sie sin(0,5), sin(1), cos(0,5) und cos(1) mit dem Taschenrechner. Was haben Sie falsch gemacht, wenn die Werte dramatisch von denen in 1.1. und 1.2. berechneten abweichen? ;-)

1.4. Versuchen Sie aus 1.1. und 1.2. die Potenzreihen für Sinus und Cosinus herzuleiten.

(Tipp: Die Potenzreihe der Exponentialfunktion ergab sich ebenfalls mit Hilfe der Taylorentwicklung: $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$)

Aufgabe 2: Relativitätstheorie

Die neuen Ideen der speziellen Relativitätstheorie, die 1905 von Albert Einstein veröffentlicht wurden, haben das bis dahin geltende klassische Weltbild völlig verändert, ihre Folgerungen („Zeitdilatation“, „Längenkontraktion“, „relativistische Massenzunahme“) scheinen auch heute noch unvereinbar mit der „alltäglichen“ Erfahrung. Der Grund dafür ist, dass die Vorhersagen der Relativitätstheorie erst bei sehr hohen Geschwindigkeiten, die wir Menschen wahrscheinlich niemals erreichen werden, von denen der klassischen Newtonschen Mechanik abweichen, man sagt auch: die klassische Mechanik ist als Grenzfall „v << c“ („v ist sehr viel kleiner als c“) in der Relativitätstheorie enthalten (was Sie weiter unten an einem Beispiel zeigen sollen).

2.1. Formulieren Sie die Einsteinschen Postulate der speziellen Relativitätstheorie.

2.2. Der (nach unserer Sonne) nächste Stern ist Alpha Centauri am südlichen Sternenhimmel (die gleichnamige Fernsehsendung auf BRα mit Prof. Lesch ist unbedingt empfehlenswert). Seine Entfernung beträgt 4,5 Lichtjahre.

a) Wie lange braucht ein Raumschiff mit der Geschwindigkeit v = 0,5 c, um zum Stern zu gelangen?

b) Wie lange dauert der Flug für die Astronauten?

c) Welche Geschwindigkeit müßte das Raumschiff haben, wenn für die Besatzung nur ein Jahr verginge?

2.3. Die Zeitdilatation läßt sich experimentell an schnellen Myonen bestätigen. Myonen sind instabile Elementarteilchen, die mit einer Halbwertszeit von 1,52µs zerfallen, d.h. nach 1,52µs existiert nur noch die Hälfte der Myonen, nach 3,04µs nur noch ein Viertel usw. Diese Zeit kann als Uhrentakt im Eigensystem S' der bewegten Myonen angenommen werden. In einem Gedankenexperiment soll ein Beschleuniger kontinuierlich Myonen mit der Geschwindigkeit v = 0,9994c ins Vakuum liefern. Die relative Myonenzahl wird entlang einer Messstrecke im Laborsystem S registriert.

a) Zeigen Sie, dass aus klassischer Sicht folgende Messwerte zu erwarten wären:

Messort x in m	0	456	911	1370
Myonenanzahl N in %	100	50	25	12.5

b) Berücksichtigt man die Ergebnisse realer Messungen in diesem Gedankenexperiment, hätte sich die Myonenanzahl jedoch erst in einer Entfernung x = 13,16km vom Beschleuniger auf die Hälfte verringert. Weisen Sie nach, dass sich dieser Wert über eine Rechnung mit einem relativistischen Ansatz bestätigen lässt.

c) Berechnen Sie die Halbwertszeit der Myonen im Laborsystem S.

2.4. Die wahrscheinlich bekannteste Formel der Menschheitsgeschichte lautet $E=mc^2$. Sie gibt die relativistische Gesamtenergie eines Körpers der Masse m_0 und der Geschwindigkeit v an; das m in der Formel ist nämlich die sogenannte dynamische Masse:

$$E=mc^2=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}=E_0+E_{kin} \qquad mit\ E_0=m_0 c^2=Ruheenergie\ des\ Körpers\ der\ Masse\ m_0 \qquad \textbf{(1)}$$

Daraus ergibt sich die relativistische kinetische Energie zu

$$E_{kin}=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}-m_0 c^2=m_0 c^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}}-1\right) \quad . \qquad \textbf{(2)}$$

Zeigen Sie, dass die relativistische kinetische Energie im Grenzfall „v << c"(d.h. $v^2/c^2 << 1$) in die klassische kinetische Energie $E_{kin}=1/2\, m_0 v^2$ übergeht. *(Tipp: Taylorentwicklung von* $\frac{1}{\sqrt{(1-x)}}$ *für kleine x, anwenden in* ***(2)*** *.)*

Konstanten und Einheiten

- Lichtgeschwindigkeit: $c=300000\,km$
- 1 Lichtjahr (LJ) ist die Strecke, die das Licht in einem Jahr zurücklegt.